

Práctica 4: Límites y Continuidad

Ejercicio 1 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 10x + 1)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-10)(x+4)} - x \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 5}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right)$$

Ejercicio 2 Calcule, si es posible, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$$

$$f) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$$

$$b) f(x) = \sqrt{9 + x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{e^{x+1} + 4}{3 - 2e^x}$$

$$c) f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$i) f(x) = e^{1/x}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3}$$

$$j) f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

Ejercicio 3 Calcule, si se puede, los límites en el infinito, además de los límites en los puntos que se indican:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x = 0^+, x = 0^-$$

$$b) f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}, \quad x = -3^+, x = -3^-$$

$$c) f(x) = \frac{5x^2}{x+3}, x = -3^+, x = -3^-$$

$$d) f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}, x = -1^+$$

$$e) f(x) = e^{1/x}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$f) f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$g) f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, x = 1, x = -1^+, x = -1^-$$

$$h) f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}, x = 1^-, x = -1^+$$

Ejercicio 4 En cada una de las siguientes funciones calcule, además del límite que se indica, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 2}{x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{20}}{e^x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12} \right)^{\frac{2}{x-3}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Ejercicio 5 Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+6)}{x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin 3x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{\operatorname{sen}(3x\pi)}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4 \operatorname{sen}(2x)}{x^2 + 5 \operatorname{sen} x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x - 1}$$

Ejercicio 6 Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x^2 + 1}{x + 1}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x + 4}\right)^{\frac{2x^2 + 1}{x - 3}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + \frac{3}{x + 1}\right)^{\frac{x^2}{2x + 1}}$$

$$c) \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{1/t}$$

$$h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h + 2) - \ln 2}{h}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$$

$$i) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$$

$$j) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{e^x - 1}$$

Ejercicio 7 Marque la única respuesta correcta:

$$a) \text{ El } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

☐ no existe ☐ es igual a 1 ☐ es igual a 0 ☐ es infinito

$$b) \text{ El } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1}{x} = 2 \text{ para}$$

☐ ningún valor de a ☐ $a = 4$ ☐ $a = 0$ ☐ todo a

Ejercicio 8 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x > 7 \\ 0 & \text{si } x \leq 7. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x(x-\pi)}$$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{1-\cos x}$$

Ejercicio 9 En cada caso determine el o los valores de la constante a para los cuales las funciones resulten continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x < 2. \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x + a & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5x + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 10 Muestre que las siguientes funciones tienen una discontinuidad evitable en los puntos señalados

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } x \neq 5, x \geq -4 \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases}, \text{ en } x = 5$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x \neq 9, x \geq -7 \\ 0 & \text{si } x = 9. \end{cases}, \text{ en } x = 9$$

Ejercicio 11

a) Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$. Encuentre un intervalo de longitud $0,2$ o menor que contenga dicha solución.

b) Demuestre que la ecuación $x^2 = \sqrt{x+1}$ tiene al menos una solución. Encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que la contenga.

Ejercicio 12 Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real. En cada caso encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que contenga a una de ellas.

$$a) 2x - 1 = \cos x$$

$$d) \frac{x}{x^4 + 1} = 0, 2$$

$$b) x^{11} + x^2 + 1 = 0$$

$$e) \frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = 0$$

$$c) \ln x = -3x$$

Ejercicio 13 Para cada una de las siguientes funciones determine ceros, puntos de discontinuidad. A partir de ellos, halle el conjunto donde la función es positiva.

$$a) f(x) = x^2(x + 3)(x - 2)$$

$$c) f(x) = x \ln x$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$d) f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 5}$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 + 1}$. Halle los valores de a y b para los cuales el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Ejercicio 2 Determine en cada caso el valor de la constante a :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 4x + 1} - 1}{x} = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^3 + ax - 1}}{x - 1} = 2$$

Ejercicio 3 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$.

Ejercicio 4 Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(ax) - 1}{2 \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $x = 0$ cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3 - 3 \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$

Ejercicio 6 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6\sqrt{x}}{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 4$.

Ejercicio 7 Halle los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las siguientes funciones. Además calcule, si existe, el límite en los puntos indicados

a) $f(x) = \frac{10e^{2x}}{5e^{2x} + 3x^2}$ c) $g(x) = \frac{4e^{-x^2}}{x^2 - 16}$, $x = 4$, $x = -4$.

b) $h(x) = \sqrt{x-2}e^{-4(x-2)^2} - \frac{\sin 5x}{x}$, $x = 0$.