

Función Cuadrática. Primeras conclusiones.

Con todas las actividades realizadas hasta el momento, podemos hacer una recapitulación de algunas ideas trabajadas hasta el momento y dar algunos nombres que vamos a utilizar de aquí en más.

Comencemos diciendo que llamamos **función cuadrática** a toda función cuya fórmula pueda expresarse de la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde a , h y k son números reales y a no es cero.

En las fórmulas como la de arriba es posible “leer” información útil. Notemos que la fórmula consta de dos términos, uno constante k y otro que varía dependiendo de los valores que tome la variable independiente. Podemos notar que el factor $(x - h)^2$ es siempre positivo o cero, por ser un cuadrado, independientemente de los valores que tome x . El menor valor que puede tomar el factor $(x - h)^2$ será, por lo tanto, cero; lo cual ocurrirá en el caso que $x = h$.

Además, el signo de a va a determinar si el primer término suma una cantidad a k (si $a > 0$) o se la sustrae (si $a < 0$).

Por ejemplo, en el problema 3 trabajaron con la función $f(x) = (x - 2)^2 + 4$. En este caso, el primer término es siempre positivo o cero; por lo tanto, para cualquier valor que le demos a x (y podemos darle cualquier valor real) vamos a estar sumando una cantidad positiva (o cero) a cuatro. Una situación particular se da si $x = 2$. En ese caso, el primer término se anula y la función vale 4. Además, como el primer término no puede ser negativo, podemos concluir que no es posible darle un valor a x para que la función valga menos de cuatro.

En el problema 1, en cambio, trabajaron con la función $G(p) = 22050 - 2(p - 250)^2$. En este caso, el factor $(p - 250)^2$ es siempre positivo o cero, por lo que los distintos valores de p sustraen una cantidad positiva a 22050. Si $p = 250$ el segundo término de la fórmula se anula y G toma el valor de 22050. No es posible obtener un valor mayor de G para cualquier valor que tome la variable p . Podemos asegurar que 22050 es el máximo valor de $G(p)$.

Razonando como en los dos ejemplos anteriores, podemos estar seguros de que en la fórmula

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

f tomará un valor **mínimo** si a es positivo o **máximo** si es negativo. Eso ocurrirá cuando $x = h$.

Otra particularidad de estas funciones que quizás fueron descubriendo a lo largo de los ejercicios consiste en que es posible hallar pares de valores de la variable independiente que tengan la misma imagen.

Así, en el problema 5, por ejemplo, trabajaron con la función $f(x) = (x + 3)^2 - 9$ y encontraron pares de valores cuya imagen es 160 (si $x = 10$ y $x = -16$) o cuya imagen es 5 (si $x = -3 + \sqrt{14}$ y $x = -3 - \sqrt{14}$). La idea es que, salvo para el caso en que $x = -3$ para el cual el término se hace cero, es posible darle pares de valores a x de forma tal que la expresión entre paréntesis tome valores opuestos que al cuadrado dan el mismo resultado. Por ejemplo:

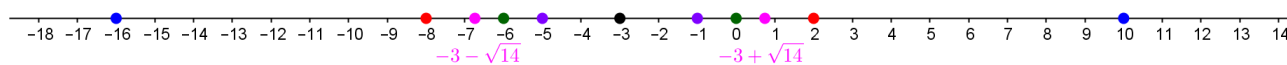
$$f(2) = (2 + 3)^2 - 9 = (5)^2 - 9 = (-5)^2 - 9 = (-8 + 3)^2 - 9 = f(-8)$$

$$f(-6) = (-6 + 3)^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = (3)^2 - 9 = (0 + 3)^2 - 9 = f(0)$$

$$f(-1) = (-1 + 3)^2 - 9 = (2)^2 - 9 = (-2)^2 - 9 = (-5 + 3)^2 - 9 = f(-5)$$

Como solo los números opuestos, al elevarlos al cuadrado, dan el mismo resultado podemos estar seguros de que hay solo un par de valores de la variable independiente con la misma imagen.

Además, los pares de números que tienen la misma imagen “se organizan”, en el ejemplo que estamos tomando, alrededor de $x = -3$. Podemos estar seguros de que los valores que están a la misma distancia de -3 tienen la misma imagen.

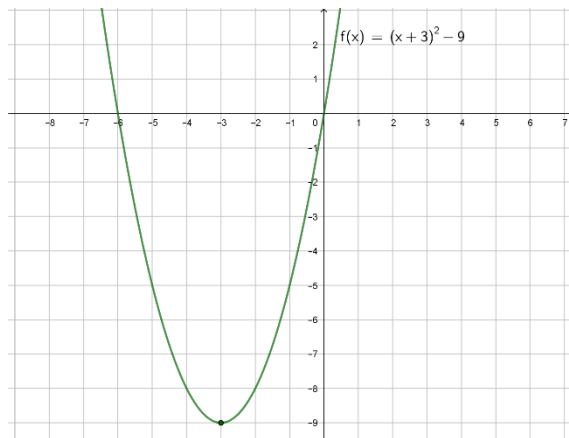


Es decir:

- Existe un valor de la variable independiente con una única imagen. Este será la abscisa del máximo o mínimo de la función.
- Hay pares de valores de la variable independiente que tienen la misma imagen. Estos valores están a la misma distancia de la abscisa del máximo o mínimo.
- Existen valores que la función nunca toma. Estos son los mayores al máximo o menores al mínimo de la función.

Por último, vimos que los gráficos de las funciones cuadráticas forman una curva particular llamada **parábola**. En la figura podemos ver el gráfico de la parábola que corresponde al problema 5.

El punto mínimo (o máximo, depende el caso) de la parábola se corresponde con los valores máximos (o mínimos) que podemos “leer” en la fórmula y se llama **vértice**.



Otra característica muy importante de las parábolas es su **simetría**. Más arriba, anticipamos valores con la misma imagen cuyas abscisas están a la misma distancia de la abscisa del vértice. Esto se observa en la parábola donde cada punto, salvo el vértice, se encuentra a la misma distancia de otro con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice. A esta recta se la conoce como **eje de simetría**.

