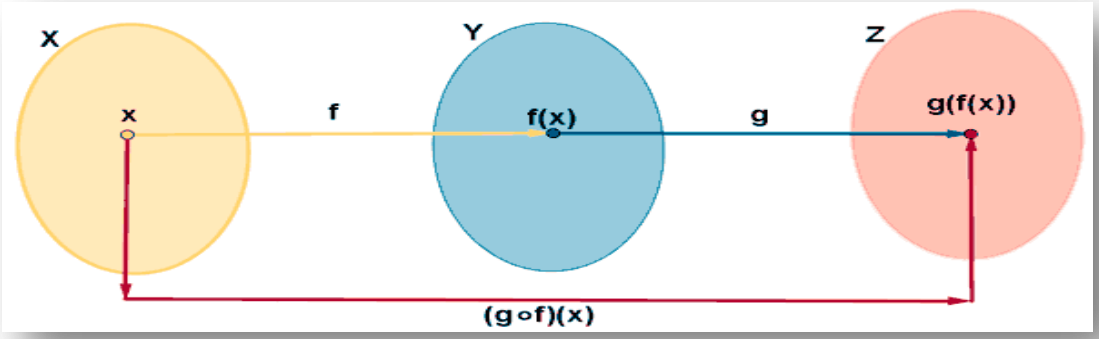
Composición de funciones

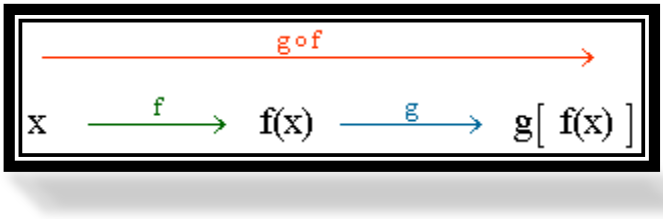
Dada la siguiente situación, donde hay una función **f** que va de ***X*** a ***Y***, (es decir el Dominio de **f** es el conjunto ***X*** y el Codominio de **f** es el conjunto ***Y***) y una función **g** que va de ***Y*** a ***Z***, aplicando sucesivamente las dos funciones, primero la **f** y luego la **g**, obtenemos una aplicación de ***X*** a ***Z*** (pasando por ***Y***) que también es función



Llamamos función compuesta de g con f a la función:

$$g \circ f: Dom(f) \longrightarrow Cod(g)$$

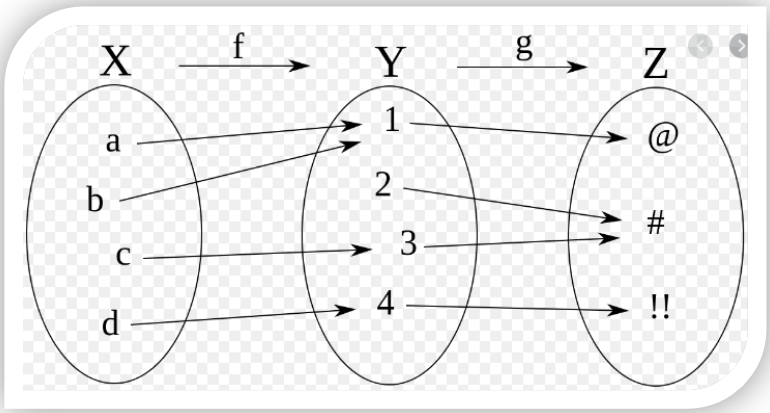
$$x \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



La expresión (g o f)(x) se lee como **g compuesta con f de x.**

Si bien nombramos primero a la ***g*** y luego a la ***f***, tenemos que tener en cuenta que la primera función que se aplica es la ***f*** y luego la ***g***.

Como ejemplo gráfico tomemos:



Por ejemplo: gof(a)=g(f(a))=g(1)=@ es decir gof(a)=@

Otro ejemplo: gof(d)=g(f(d))=g(4)= !! es decir gof(d)= !!

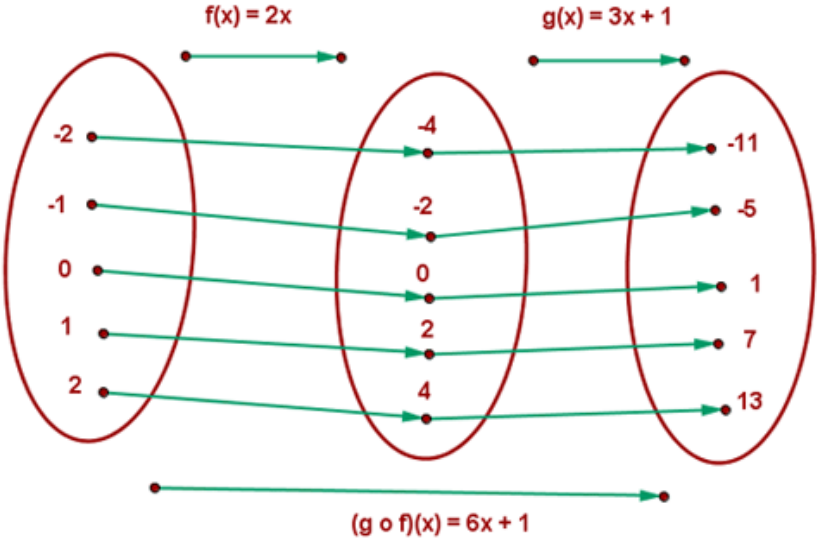
.

Vale señalar que para poder componer dos funciones se debe cumplir la condición:
Im(f)) ⊆ Dom(g) (esto se lee: el conjunto imagen de f está incluido en el dominio de g)
Esto es necesario para calcular la función (g o f), ya que si hubiese un valor $x_0 \in$ Dom(f) tal que $f(x_0) \notin$ Dom(g), entonces g[$f(x_0)$] no existiría y (g o f) no estaría definida para x_0. En ese caso habría que retirar el x_0 del conjunto de salida de la composición para que sea función.
Por lo tanto, el dominio máximo de la función compuesta (**g o f**) será el Dom(**f**) pero, de ser necesario restringirlo, puede ser un subconjunto suyo, es decir: **Dom(g o f) ⊆ Dom(f)**

En general, la función (**g o f**)(x) es distinta a la función (**f o g**)(x) -esto lo veremos a través de ejemplos- es decir, la composición de funciones no es una operación conmutativa, pues importa el orden en que se realiza.

Ejemplos de composición de funciones

Primero veamos uno sencillo expresado con una representación gráfica



Por ejemplo: gof(1)=g(f(1))=g(2)=7 es decir gof(1)=7

Acá hicimos todo el proceso, tomamos el 1 en el dominio de f , le aplicamos la f y nos dio 2, y luego al 2 le aplicamos la g, llegando así al 7, es decir el 1 a través de la composición su imagen es 7

En el ejemplo vemos que así como f tiene su expresión: f(x)=2x y g tiene su expresión: g(x) = 3x + 1 la composición también la tiene: gof(x)=6x+1.

Con la fórmula de la composición, gof (1)=6.1+1=7

¿Cómo llegamos a encontrar la fórmula de la composición?

Para eso trabajemos con otro ejemplo, con funciones de variable real que conocemos

Dadas las funciones f(x) = $2x^2$ + 1 y g(x) = 3x + 2, vamos a calcular el valor de las funciones compuestas, primero en un punto cualquiera, y luego la expresión general:

a) Tomamos el x =0 y queremos calcular la imagen luego de aplicarle f y después g es decir: $gof(0)$

$$gof(0) = g[f(0)] = g[1] = 5$$

b) Ahora calculemos al revés, primero aplicando g y luego f otra vez en cero.

$$fog(0) = f[g(0)] = f[2] = 9$$

Claramente se ve que no es conmutativa la composición: $gof(0) \neq fog(0)$

c) Calculemos la fórmula de la composición primero *fog* y luego *gof*

$$fog(x) = f[g(x)] = f[3x+2] = 2(3x+2)^2 + 1$$

$$gof(x) = g[f(x)] = g[2x^2 + 1] = 3.(2x^2 + 1) + 2$$

$$gof(x) = 6x^2 + 5$$

Otro ejemplo,

Dadas las funciones f(x) = 10 - x y g(x) = 1 / x, vamos a calcular la expresión general de ambas composiciones:

$$fog(x) = f[g(x)] = f[1/x] = 10 - \frac{1}{x} \qquad Dom(fog) = R - \{0\} = Dom(g)$$

$$gof(x) = g[f(x)] = g[10 - x] = \frac{1}{10 - x} \qquad Dom(gof) = R - \{10\} \subset Dom(f) = R$$

Ejercicios:

Dadas las funciones

a) $f(x) = -x + 1$ $g(x) = (x-1)^2$ $h(x) = |x|$

Calcular y graficar:

1) $fog(x)$ 2) $hof(x)$ 3) $gof(x)$ 4) $foh(x)$ 5) $fof(x)$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $g(x) = x + 2$

Calcular y graficar:

1) $gof(x)$ 2) $fog(x) =$ 3) $gofog(x) =$

c) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ $g(x) = \frac{3}{x+2}$

Calcular y graficar:

1) $gof(x)$ 2) $fog(x) =$ 3) $gofog(x) =$

d) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 1$ $g(x) = \frac{1}{x-1} + 3$

Calcular y graficar:

1) $gof(x)$ 2) $fog(x) =$ 3) $gofog(x) =$ 4) $fogof(x) =$

Hasta acá es la Actividad 6.

Es una actividad corta para que, si aún no lo hiciste, tengas el tiempo para terminar de completar la 5 y la 6.

Consultá las dudas con tu profe.

