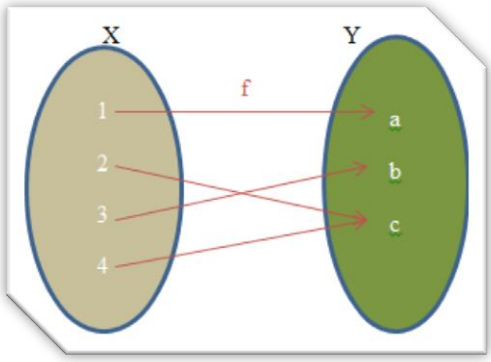
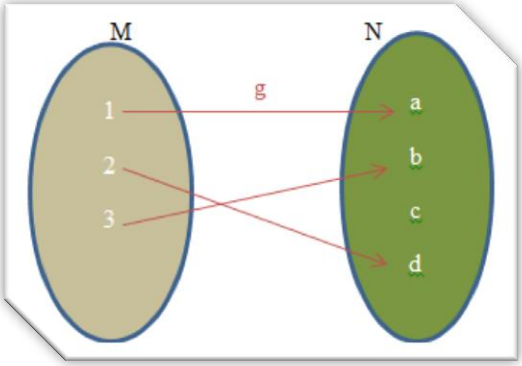
La función inversa

Sabemos que una función es una relación de un conjunto de salida en otro de llegada, en dónde a cada elemento del conjunto de salida le corresponde un elemento en el conjunto de llegada.

La pregunta ahora es: si dada una función, invertimos la relación, es decir si "damos vuelta las flechas", quedando como conjunto de salida de la relación inversa el de llegada de la función original, ¿también es función esa relación?

Veamos ejemplos:

	
Para la f, si invertimos la relación, **no es función**, porque el "c" iría a parar a dos elementos distintos en el conjunto de llegada	Para la g, si invertimos la relación, **no es función,** porque el "c" no iría a parar a ningún elemento en el conjunto de llegada.
En este caso la función f no tienen función inversa (la relación inversa no es función) y el motivo es que hay elementos distintos del dominio que tienen la misma imagen: f(2) = f(4) = c, por eso al querer volver el c iría tanto a 2 como a 4	En este caso la función g no tienen función inversa (la relación inversa no es función) y el motivo es que hay elementos del codominio que no están en la imagen, por eso al querer volver el c no iría a ningún elemento
Entonces para que una función tenga inversa es necesario que si tomamos dos elementos distintos en el dominio tengan necesariamente imágenes distintas: Para todo a y b del Dominio, se cumple que f(a) es distinto f(b). Cuando pasa se dice que la función es **inyectiva**	Entonces para que una función tenga inversa es necesario que la imagen sea igual al codominio. Cuando pasa eso se dice que la función es **suryectiva**
Definición: f es **inyectiva** si $\forall a,b \in Dom(f),\ si\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$	Definición: f es **suryectiva** si $\text{Im}(f) = Cog(f)$

Función inversa

Para que una función tenga inversa, es necesario que sea inyectiva y suryectiva simultáneamente, y en ese caso se dice que es **biyectiva**

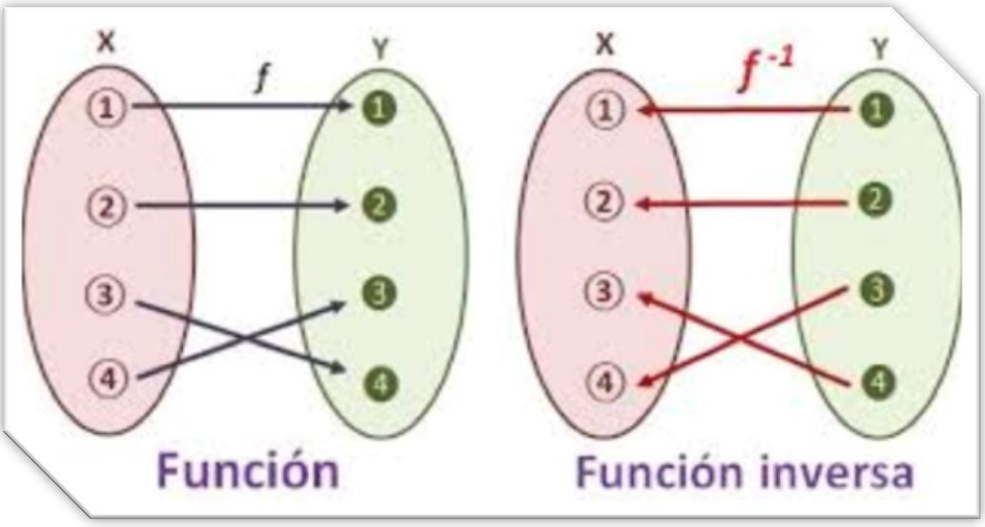
Definición: *f* es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva

Observación: Si una función no es inyectiva o suryectiva, uno puede analizar que modificaciones se pueden hacer sobre el dominio o codominio para que si lo sea.

Por ejemplos, en el caso del ejemplo visto, en la f: X $\longrightarrow$ Y. no es inyectiva, pero si sacamos al 4 del dominio, es decir f: {1,2,3} $\longrightarrow$ Y, sí es inyectiva, pero cambió el dominio, es decir es otra función pero que cumple que los elementos que quedan en el dominio se relacionan de la misma manera con los del codominio.

También en el caso de la g: M $\longrightarrow$ N, si tomamos como codominio sólo a la imagen, g: M $\longrightarrow$ {a,b,d} ahí es suryectiva, y no se modifica en nada los elementos que están relacionándose mediante la función.

Con lo dicho**, si** $f : A \to B$ **es una función biyectiva**, es decir, inyectiva y suryectiva, **entonces existe la función inversa** de *f*, que se denota con f^{-1}, cuyo dominio coincide con el codominio de *f* y el codominio de f^{-1} coincide con el dominio de *f*; es decir $f^{-1} : B \to A$



Función inversa

Si miramos atentamente vemos que podemos componer, tanto f con f^{-1} como también f^{-1} con f , y en ambos casos lo que nos queda es la función identidad, es decir una función en la que cada punto va a parar a sí mismo.
Y esto nos sirve para definir función inversa.

Definición:

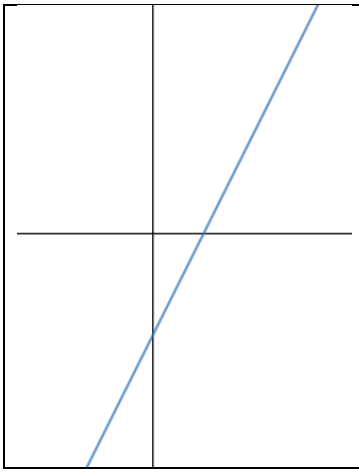
Si $f : A \to B$ es una función **biyectiva,**
entonces existe la función inversa
$f^{-1} : B \to A$ que cumple:
$[f^{-1} o f](x) = x \quad \forall x \in A \qquad \wedge \qquad [f o f^{-1}](x) = x \quad \forall x \in B$

Ahora veamos con las funciones de variable real con las que venimos trabajando, como determinar la función inversa:

Ejemplo 1:

Estudiar si tienen inversa y hallarla de la función $f(x) = 2x - 1$

f es lineal, y de pendiente positiva, así que rápidamente sabemos que su gráfico es aproximadamente:



f es estrictamente creciente, con lo cual, a mediad que avanza por el dominio, va tomando cada vez valores mayores, es decir nunca vuelve a tomar un valor que ya tomó, es decir que es **inyectiva.**
La imagen de f es R, con lo cual es **suryectiva.**

Es decir ***f* es biyectiva**, al igual que cualquier función lineal con pendiente no nula.
Entonces existe la inversa de f

Falta calcular quién es f^{-1}

Conocemos quién es: $f(x) = 2x - 1$ y si bien aún no conocemos a f^{-1}
Sí sabemos que $[f o f^{-1}](x) = x$

Entonces: $[f o f^{-1}](x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

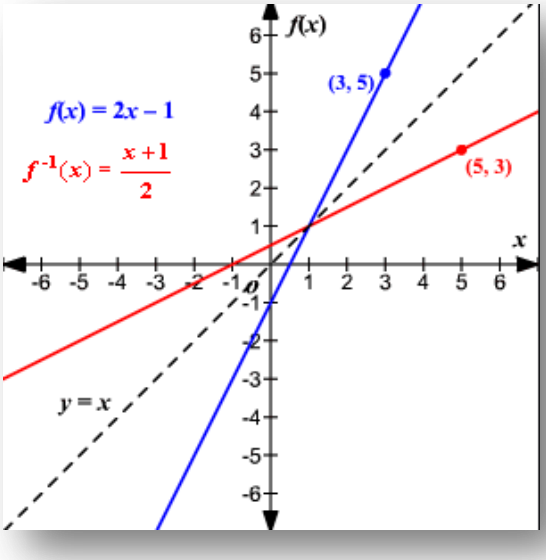
$2 f^{-1}(x) - 1 = x$ Nos queda una ecuación funcional, donde nuestra incógnita es f^{-1}

$2 f^{-1}(x) = x + 1$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+1)$$

La función inversa también es lineal.
Se puede probar que la inversa de cualquier función lineal, no constante, es lineal (para quien esté interesado en hacerlo, anímese y cualquier duda consulta a su profe)

Si en un mismo gráfico, trazamos el gráfico de ambas funciones, vemos algo que vale de forma general: El gráfico de una función con el gráfico de su inversa son simétricos respecto de la recta y = x (que es el gráfico de la función identidad)



Es un resultado importante este último, porque es útil, por lo cual lo resaltamos:

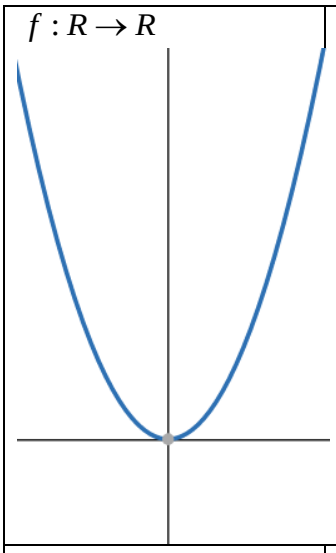
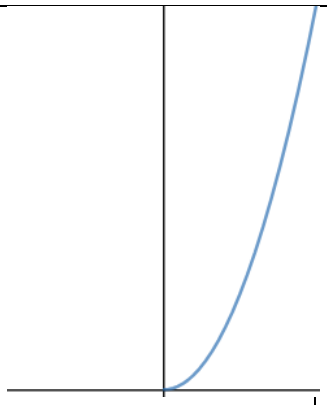
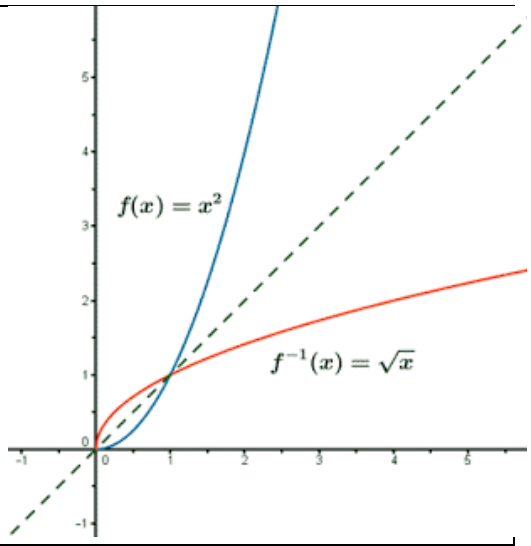
En el plano cartesiano el gráfico de f^{-1} resulta simétrico al gráfico de f respecto de la recta y = x

Ejemplo 2:

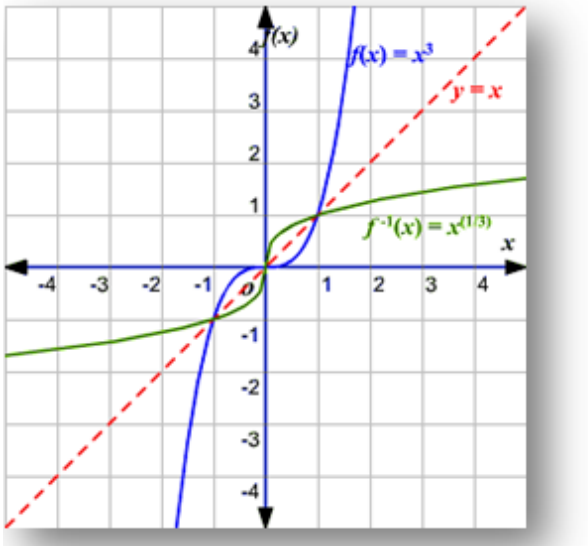
Si tomamos $f(x) = x^2$, considerando que $f : R \to R$, claramente no es ni inyectiva (¿por qué?) y tampoco es suryectiva (¿por qué?),

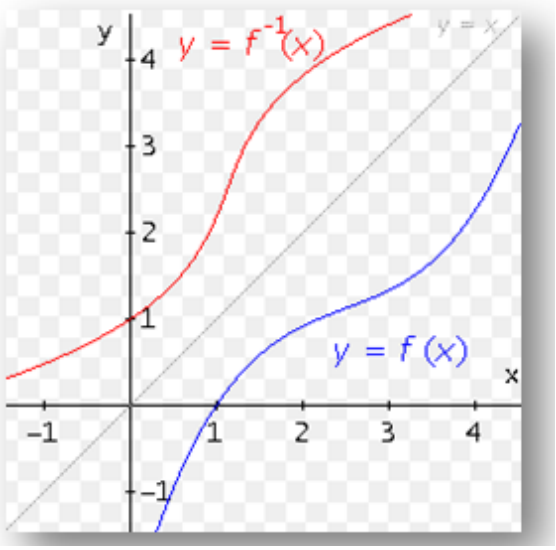
Pero si restringimos el dominio y el codominio a $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

Entonces $f(x) = x^2$ es biyectiva

$f : R \to R$ 	 $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$	
No es ni inyectiva ni suryectiva	Es biyectiva	$f^{-1} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Otros ejemplos de gráficos de funciones y sus inversas:





EJ1: Dadas las siguientes funciones, indicar el $Dom(f)$, la $\mathrm{Im}(f)$, calcular f^{-1} graficarla e indicar el $Dom(f^{-1})$ y la $\mathrm{Im}(f^{-1})$

$f(x) = \frac{x}{3} + 2$	$f(x) = -x + 2$	$f(x) = x - 3$	f lineal que cumple $f(1) = 6 \wedge f(-3) = 0$
$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(x) =$	$f^{-1}(x) =$

$g(x)=\frac{1}{x}+2$	$f(x)=-\frac{1}{x}-3$	$h(x)=\frac{2}{x-3}+1$	t homográfica que cumple x = -1 es A.V. $t(1)=6 \quad \wedge \quad t(-3)=0$
$g^{-1}(x)=$	$f^{-1}(x)=$	$h^{-1}(x)=$	$t^{-1}(x)=$

Optativo $g(x)=\begin{cases} -\frac{x}{2} & si \quad x\le -2 \\ -x-1 & si \quad x>-2 \end{cases}$	$Dom(f)=(2,+\infty)$ $f(x)=(x-2)^2$	$Dom(h)=(-1,+\infty)$ $h(x)=(x+1)^2-4$
$g^{-1}(x)=$	$f^{-1}(x)=$	$h^{-1}(x)=$

EJ2: Calcular el Dominio y codominio para que las siguientes funciones sean biyectivas, calcular la inversa, y graficar ambas funciones:

a) $f(x)=x^2+2$ b) $f(x)=(x-1)^2+2$ c) $f(x)=x^2+4x$

d) $g(x)=\frac{x+3}{x}$ e) $g(x)=\frac{x+3}{x+2}$ f) $g(x)=foh(x)$ siendo $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ y $h(x)=x-1$

EJ3: Sabemos que $f:R\to R$ es biyectiva y que $f^{-1}(2)=1$. También sabemos que $g(x)=\frac{3}{x-1}+2$

Calcular, si es posible: (si no es posible, explicar el por qué)

a) $(gof^{-1})(2)=$

b) $(gof)(1)=$

c) $(fog)(0)=$

d) $(fog)(-2)=$

e) $(fog^{-1})(2)=$

Hasta acá es la Actividad 7.

