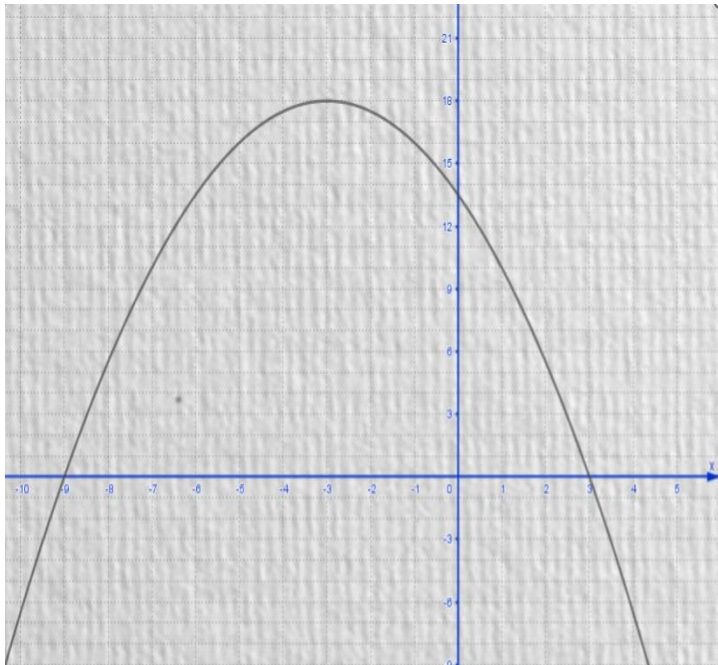


Resolución: Ejercicios de repaso

1) Hallá los conjuntos de positividad, negatividad, decrecimiento e imagen de la función dada por la fórmula

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 18. \text{ Graficá.}$$



Función cuadrática

Análisis de la función $f(x) = -0.5(x+3)^2 + 18$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R}$$

$$C^0 = \{-9, 3\}$$

$$C^+ = (-9; 3)$$

$$C^- = (-\infty; -9) \cup (3; +\infty)$$

$$C\uparrow = (-\infty; -3)$$

$$C\downarrow = (-3; +\infty)$$

$$\text{Imagen} = (-\infty; 18]$$

$$\text{Ordenada al origen: } 13.5$$

$$\text{Vértice: } V = (-3; 18)$$

$$\text{Eje de simetría: } x = -3$$

2) Escribí, si es posible, las fórmulas de dos funciones cuadráticas con mínimo igual a 4 cuando $x = -3$. Explicá por qué las fórmulas propuestas cumplen lo pedido.

Sabemos que si f tiene un mínimo entonces $a > 0$ y si el mínimo 4 corresponde en $x = -3$ entonces el vértice de la parábola es $(-3, 4)$. Por ejemplo:

$$f_1(x) = 5(x+3)^2 + 4$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$$

3) Escribí, si es posible, las fórmulas de dos funciones cuadráticas con máximo igual a 5 que pasen por el punto $(0; 3)$. Graficá.

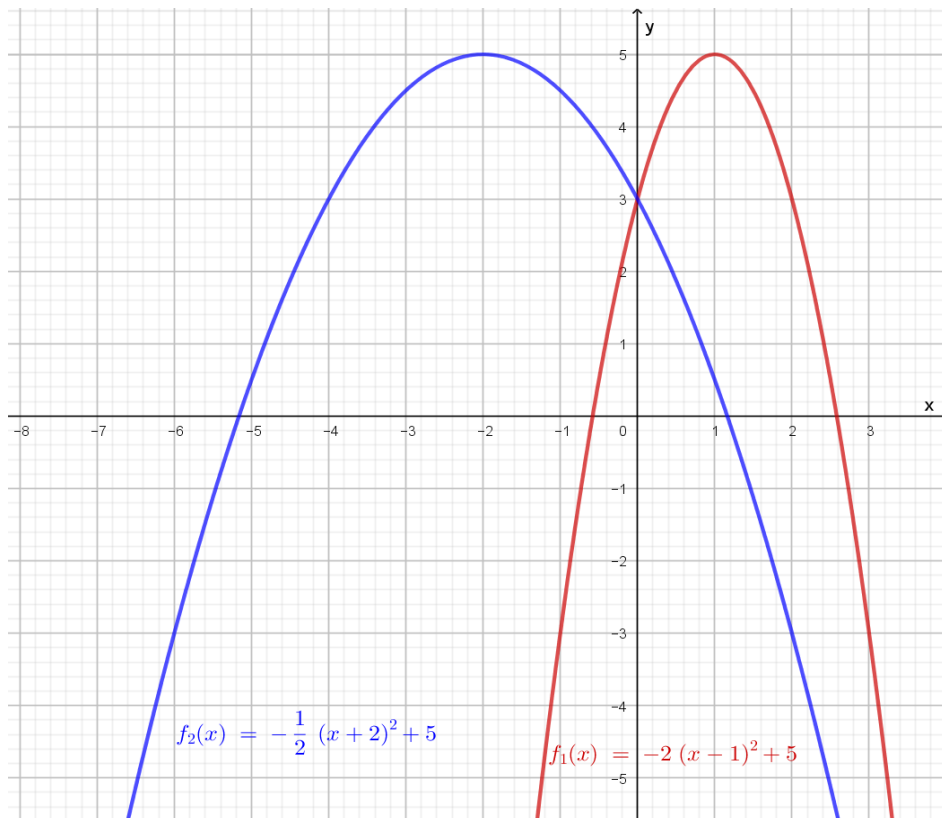
Si f tiene un máximo entonces $a < 0$.

Para el primer ejemplo considero $V = (1, 5)$ entonces $f_1(x) = a(x-1)^2 + 5$. Como $(0; 3)$ pertenece a la función $3 = a(0-1)^2 + 5 \Rightarrow -2 = a(-1)^2 \Rightarrow a = -2$

$$\text{Por lo tanto: } f_1(x) = -2(x-1)^2 + 5$$

Para el segundo ejemplo considero $V = (-2, 5)$ entonces $f_2(x) = a(x+2)^2 + 5$. Como $(0; 3)$ pertenece a la función $3 = a(0+2)^2 + 5 \Rightarrow -2 = a \cdot 4 \Rightarrow a = -\frac{2}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$\text{Por lo tanto } f_2(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$$



4) Escribí, si es posible, las fórmulas de dos parábolas con vértice en el punto $(-2;3)$ que no intersequen al eje x . Explicá por qué las fórmulas propuestas cumplen lo pedido.

Si consideramos a 3 como el mínimo de la función entonces la gráfica de f no se intersecará con el eje de abscisas, para ello debemos considerar $a > 0$.

Por ejemplo:

$$f_1(x) = 5(x+2)^2 + 3$$

$$f_2(x) = \frac{3}{4}(x+2)^2 + 3$$

5) Hallar la fórmula de la parábola con vértice $V = (0; 3)$ y raíz $x = 2$.

Si el vértice es $V=(0,3)$ la fórmula será de la siguiente forma $f(x) = a(x-0)^2 + 3$, si 2 es raíz entonces

$f(2) = 0$. Por lo tanto: $0 = a(2)^2 + 3 \Rightarrow -3 = a \cdot 4 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$. La función buscada es:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

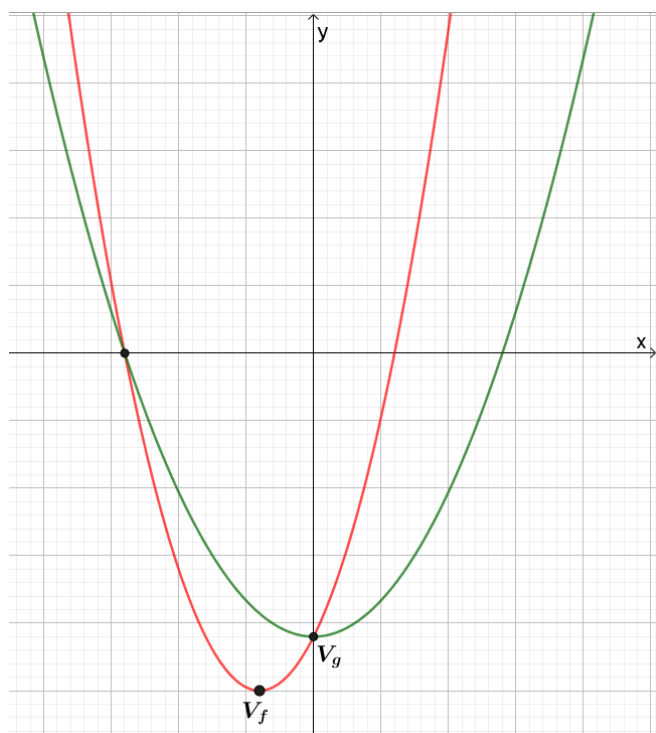
6) Escribí, si es posible, las fórmulas de dos parábolas que tengan conjunto imagen: $[0; +\infty)$ y eje de simetría: $x = 2$

El conjunto imagen nos indica que la función tiene mínimo 0, por el eje de simetría sabemos que la $x_v = 2$, por lo tanto, el $V = (2,0)$. Dos ejemplos son:

$$f_1(x) = 3(x-2)^2$$

$$f_2(x) = \frac{1}{5}(x-2)^2$$

7) Una de las parábolas que se muestra tiene ecuación: $y = \frac{1}{4}(x + 8)^2 - 25$. Hallá la fórmula de la otra parábola. Los puntos V_f y V_g son los vértices de las parábolas f y g respectivamente.



Gráficamente observamos que el vértice correspondiente a la gráfica de g coincide con la ordenada al origen del gráfico de f , por lo tanto $f(0) = \frac{1}{4}(0+8)^2 - 25 \Rightarrow f(0) = -9$ es decir: $V_g = (0; -9)$

Hallamos los ceros de la ecuación dada $y = \frac{1}{4}(x+8)^2 - 25$

$0 = \frac{1}{4}(x+8)^2 - 25 \Rightarrow 25 = \frac{1}{4}(x+8)^2 \Rightarrow 100 = (x+8)^2 \Rightarrow 10 = |x+8| \Rightarrow 10 = x+8 \vee -10 = x+8$
 entonces $x = 2 \vee x = -18$. Quiere decir que $(-18, 0)$ pertenece a ambas funciones, entonces

Considerando el vértice $g(x) = ax^2 - 9$ entonces $0 = a(-18)^2 - 9 \Rightarrow 9 = a \cdot 324 \Rightarrow a = \frac{9}{324} \Rightarrow a = \frac{1}{36}$

La función buscada es: $g(x) = \frac{1}{36}x^2 - 9$

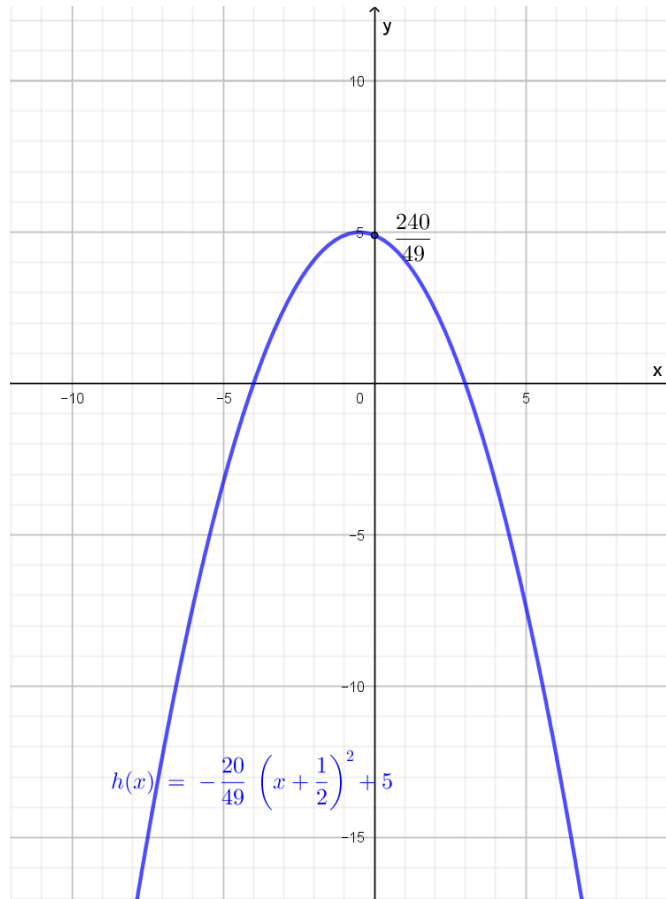
8) Determiná la ordenada al origen de la parábola que cumple: $C^0 = \{-4; 3\}$ y el máximo es igual a 5. Graficá.

Conociendo las raíces de la parábola tenemos dos puntos simétricos, por lo tanto

$x_v = \frac{-4+3}{2} \Rightarrow x_v = -\frac{1}{2}$, el vértice de la parábola es $V = (-\frac{1}{2}; 5)$

$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = a(3 + \frac{1}{2})^2 + 5 \Rightarrow -5 = a\left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow a = -\frac{20}{49}$

$f(x) = \left(-\frac{20}{49}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5 \Rightarrow f(0) = \left(-\frac{20}{49}\right)\frac{1}{4} + 5 \Rightarrow f(0) = \frac{240}{49}$



9) Proponé, si es posible, las fórmulas de dos funciones cuadráticas con el conjunto de positividad $C^+ = (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$.

Partiendo del conjunto de positividad podemos decir que $x = -4$ y $x = 3$ son las raíces y $a > 0$, entonces

$$x_v = \frac{-4+3}{2} \Rightarrow x_v = -\frac{1}{2}$$

Funciones propuestas:

f_1 con $V = \left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ entonces $f_1(x) = a_1 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4$ para hallar a_1 evaluamos en alguna de las raíces

$$0 = a_1 \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \Rightarrow 4 = a_1 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{16}{49} \quad \text{Por lo tanto: } f_1(x) = \frac{16}{49} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4$$

f_2 con $V = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ entonces $f_1(x) = a_2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$ para hallar a_2 evaluamos en alguna de las raíces

$$0 = a_2 \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow 1 = a_2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{49} \quad \text{Por lo tanto: } f_2(x) = \frac{4}{49} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$