

Práctica 5: Derivada

Ejercicio 1 Justifique, por medio de los cocientes incrementales, las siguientes igualdades

$$a) f(x) = 7 \implies f'(x) = 0$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$b) f(x) = 3x + 5 \implies f'(x) = 3$$

$$e) f(x) = \sqrt{x+5} \implies f'(4) = \frac{1}{6}$$

$$c) f(x) = (x+1)^2 \implies f'(4) = 10$$

Ejercicio 2 Halle, usando el cociente incremental, el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Escriba la ecuación de la recta tangente en esos mismos puntos,

$$a) f(x) = 4x + 7, \text{ en } x = 3$$

$$b) f(x) = \frac{2}{x-1}, \text{ en } x = 5$$

$$c) f(x) = \sqrt{x+12}, \text{ en } x = 13$$

$$d) f(x) = x + \ln(x), \text{ en } x = 1$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

Ejercicio 3 ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangente es paralela al eje de las x ?

Ejercicio 4 Sean $f(x) = 3x^2 + x$ y $g(x) = 5x + 2$. Encuentre el punto en el cual las rectas tangentes de f y g resultan paralelas. Halle las correspondientes ecuaciones.

Ejercicio 5 Usando las reglas de derivación, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición.

$$a) f(x) = x^3 + x^2 + \operatorname{sen}(x)$$

$$d) f(x) = x \ln(x)$$

$$b) f(x) = x^2 \cos(x)$$

$$e) f(x) = x^5 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = 3 \operatorname{sen}(x)$$

$$f) f(x) = e^x + \ln(x)$$

$$g) f(x) = x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x)$$

$$j) f(x) = (x+2)(x^2+1) \ln(x)$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$k) f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2+1}$$

$$i) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$l) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 6 Usando la regla de la cadena, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición

$$a) f(x) = (1+x)^2$$

$$i) f(x) = \ln(2 + \operatorname{sen}(x))$$

$$b) f(x) = (1+x)^3$$

$$j) f(x) = e^{x^2 + \cos(x)}$$

$$c) f(x) = (1+x)^{2001}$$

$$k) f(x) = \ln^2(x^2+1)$$

$$d) f(x) = e^{x+3}$$

$$l) f(x) = \ln(5x)$$

$$e) f(x) = (1-x)^3$$

$$f) f(x) = \cos(3x)$$

$$m) f(x) = \frac{(2x^3+3)^2}{\ln(x^2+1)}$$

$$g) f(x) = 3\operatorname{sen}^4(x)$$

$$n) f(x) = \sqrt{4+5x^2}$$

$$h) f(x) = \ln(x+1)$$

Ejercicio 7 Calcule la derivada de la función en su dominio de definición, siendo $f(x) =$

$$a) x^x$$

$$b) x^{3x} + 2^x$$

$$c) (\operatorname{sen}^3(x))^{\ln(x)}$$

$$d) x^{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 8 Sean f , ℓ y h funciones tales que

$$f(x) = 1 + x^2, \quad \ell'(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(1+3x)), \quad \ell(0) = 4, \quad h(x) = \ell(1+2x)$$

Calcule $(f \circ \ell)'(0)$ y $(h \circ f)'(0)$.

Ejercicio 9 Pruebe que la función $f(x) = 7e^{kx}$ es solución de la ecuación $f'(x) = kf(x)$.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes funciones estudie la continuidad y, mediante el estudio del cociente incremental, la derivabilidad en el punto indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

En las funciones que resulten derivables en los puntos indicados, escriba la ecuación de la recta tangente.

Ejercicio 11 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$\text{definida como } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases} . \text{ Entonces, en } x = 1$$

- ☐ f es continua pero no derivable.
- ☐ f es continua y derivable.
- ☐ f no es continua pero si es derivable.
- ☐ f no es ni continua ni derivable.

Ejercicio 12 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5e^{x^3+2x}$

- a) Muestre que $f'(x) > 0$ para todo x . Además, note que $f(0) = 5$.
- b) Use el teorema de la función inversa para justificar la existencia de $(f^{-1})'(5)$ y calcule su valor.

Ejercicio 13 La temperatura C de un cuerpo que inicialmente estaba a 90 grados Celsius, se enfría de acuerdo a la ley $C(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de 20° Celsius) donde t es el tiempo en minutos.

- a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.
- b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura C y la temperatura ambiente. Más precisamente:

$$C'(t) = -0,1 (C(t) - 20)$$

- c) Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

Ejercicio 14 Calcule las siguientes derivadas

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f^{(5)}(x), f^{(70)}(x)$

b) $f(x) = e^x$, $f^{(19)}(x), f^{(200)}(x)$

c) $f(x) = e^{kx}$, $f^{(20)}(x)$

d) $f(x) = \ln(x+1)$, $f^{(4)}(x)$

e) $f(x) = 5x^3 + 8x$, $f^{(3)}(x), f^{(200)}(x)$

Ejercicio 15 Dados a y $b \in \mathbb{R}$ muestre que $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \cos(x)$ es solución de la siguiente ecuación

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Ejercicio 16 Considere la función $f(x) = (1+x)^n$, con n natural. Calcule $f^{(k)}(0)$ para todo valor de k .

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Pruebe que la función $f(x) = x|x|$ es derivable para todo x , que $f'(x)$ es continua pero que no existe $f''(0)$.

Ejercicio 2 Pruebe que el gráfico de la función $f(x) = x + \ln(x)$ tiene una recta tangente que pase por el origen.

Ejercicio 3 Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ que pasen por el punto

a) $(1, 0)$ b) $(0, 0)$ c) $(0, 4)$.

Ejercicio 4 La recta tangente de la función f en el punto de abscisa $x = -1$ tiene ecuación $y = -5x + 3$. Calcule la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $g(x) = f(-x^2 + \operatorname{sen}(\pi x))$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 5 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x \neq 4 \\ a & \text{si } x = 4 \end{cases}.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua. Determine si resulta derivable.

Ejercicio 6 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + a \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ bx + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Determine a y b para que f sea derivable en $x = 1$.

Ejercicio 7 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Halle los valores de a y b para que f resulte derivable.

Ejercicio 8 Sean f y g funciones derivables tales que la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ tiene ecuación $y = 4x - 1$ y la recta tangente al gráfico de g en $x_0 = 2$ tiene ecuación $y = 3x - 5$. Halle, si es posible, la ecuación de la recta tangente al gráfico de

- a) $f \circ g(x)$ en $x_0 = 2$,
- b) $f^{-1}(x)$ en $x_0 = 3$,
- c) $g^{-1}(x)$ en $x_0 = 1$.