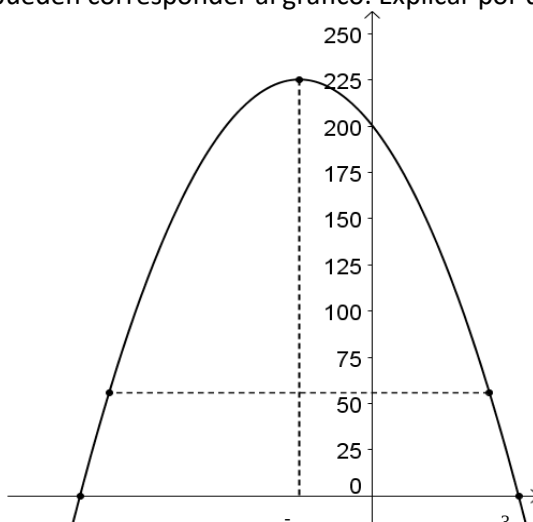


Problema 13

Marcá todas las fórmulas que pueden corresponder al gráfico. Explicar por qué.



Analicemos las fórmulas una por una

a) $y = -\frac{1}{9}(x + 15)^2 + 225$	Mirando la formula sabemos, por el trabajo realizado hasta acá, que esta parábola tiene vértice en $(-15; 225)$ y es su máximo. Además, podríamos verificar que si $x = 30, y = 0$; y que si $x = -60, y = 0$. Ambos puntos están marcados en el gráfico. También podemos calcular la ordenada al origen: si $x = 0, y = 200$. En el gráfico no está marcado pero parece que puede ser ese valor. El problema es ¿Cuántos puntos tenemos que considerar para estar lo suficientemente seguros/as de que la fórmula corresponde al gráfico? En actividades anteriores (Problema 11 b) usamos esta idea: como conocemos las coordenadas de su vértice, sabemos que la formula debe ser: $y = a(x + 15)^2 + 225$ Usando la raíz que nos da el gráfico: $(30; 0) \rightarrow 0 = a(30 + 15)^2 + 225 \rightarrow a = -\frac{1}{9}$ Llegamos entonces a la fórmula de a). Usando esta idea, al menos podemos estar seguros/os que con las coordenadas del vértice y un punto cualquiera podemos obtener la fórmula de la función. Por lo tanto, esta fórmula corresponde al gráfico.
b) $y = \frac{1}{9}(x + 15)^2 + 225$	Por lo visto hasta acá, esta parábola tiene mínimo. Descartada.

c) $y = -\frac{1}{9}(x + 60)(x - 30)$	Otra vez, podemos verificar que algunos puntos del gráfico se verifican en la fórmula. Si $x = 30 \rightarrow y = 0$ Si $x = -60 \rightarrow y = 0$ Si $x = -15 \rightarrow y = 225$ Sabemos que pasa por el punto $(-15; 225)$. Pero ¿podemos saber si es el vértice? Esta fórmula no nos permite ver “a simple vista” cuál es el máximo o mínimo de la función. Vamos a usar que ya sabemos que la fórmula de a) es correcta y transformar esa fórmula y la de c) para ver si llegamos a la misma expresión. En a) $y = -\frac{1}{9}(x + 15)^2 + 225 = -\frac{1}{9}(x^2 + 30x + 225) + 225 =$ $= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{30}{9}x - 25 + 225$ $y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 200$ En c) $y = -\frac{1}{9}(x + 60)(x - 30) = -\frac{1}{9}(x^2 - 30x + 60x - 1800)$ $y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 200$ Como las dos fórmulas son equivalentes, podemos estar seguros/as de que la fórmula c) también corresponde al gráfico.
d) $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}x + 225$	La ordenada al origen es $x = 0 \rightarrow y = 225$ No coincide con la del gráfico. Descartada.
e) $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}x + 200$	Sabiendo que la expresión de a) es correcta $y = -\frac{1}{9}(x + 15)^2 + 225 = -\frac{1}{9}(x^2 + 30x + 225) + 225 =$ $= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{3}x - 25 + 225 = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 200$ Como es diferente a la e), esta queda descartada.
f) $y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{30}{9}x + 200$	Esta fórmula es igual a la que obtuvimos desarrollando a), por lo tanto, corresponde al gráfico.

En resumen, hay tres fórmulas que corresponden a la misma función y, por lo tanto, son equivalentes:

- $y = -\frac{1}{9}(x + 15)^2 + 225$
- $y = -\frac{1}{9}(x + 60)(x - 30)$
- $y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{30}{9}x + 200$

Cada una tiene distintas cantidades de términos y cada una nos “muestra” algo diferente de la función. ¿Sabés lo que muestra cada una? El próximo ejercicio te propone pensar en eso.

Problema 14

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones tienen el mismo gráfico que $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4,5$

- I. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
- II. $y = -\frac{1}{2}(x - 4)(x + 2)$
- III. $y = -\frac{1}{2}(5x - 5)^2 + 4,5$

Podemos desarrollar la fórmula propuesta y comparar:

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4,5 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + 4,5 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

- I. Esta fórmula es igual a la que obtuvimos. Corresponde a la misma función y, por lo tanto, tendrá el mismo gráfico.
- II. $y = -\frac{1}{2}(x - 4)(x + 2) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.
También es igual a la fórmula que obtuvimos inicialmente. Se trata de la misma función.
- III. Podemos desarrollar la fórmula como en el caso anterior. Pero les proponemos pensarlo de otra forma:

$$y = -\frac{1}{2}(5x - 5)^2 + 4,5 = -\frac{1}{2}[5(x - 1)]^2 + 4,5 = -\frac{1}{2} \cdot 5^2(x - 1)^2 + 4,5 = -\frac{25}{2}(x - 1)^2 + 4,5$$

Podemos comprobar que, si bien los gráficos de ambas fórmulas tendrán el mismo vértice, y que ese punto será el de mayor ordenada, sus fórmulas no son equivalentes y por lo tanto sus gráficos no serán iguales.

b) Considerando todas las funciones de la parte a),

- i) ¿En cuáles de las fórmulas podés “leer” las coordenadas del vértice de la parábola que define?
En la original y en III se puede “ver” que el vértice es (1; 4,5)
- ii) ¿En cuáles podés “leer” cuáles son sus raíces?
Calcular las raíces es sencillo en la fórmula original y en III, pero no se puede “leer” de la fórmula, hay que resolver una ecuación.
Calcular las raíces de la expresión I no es para nada evidente (¡Intentalo!) y tampoco se puede “leer” en la fórmula.

En cambio, en II, si planteamos la ecuación que nos permite calcular las raíces tendremos:

$$0 = -\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$$

En este caso, no hace falta desarrollar el miembro de la derecha. Por tratarse de un producto, los únicos valores que hacen cero la expresión son $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$.

En este caso podemos “leer” las raíces en la fórmula II.

Compará esta idea con la fórmula c) del Problema 13.

iii) Graficá la parábola y ubicá en el gráfico las respuestas de los ítems i) y ii).

