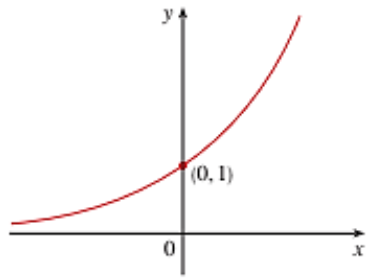
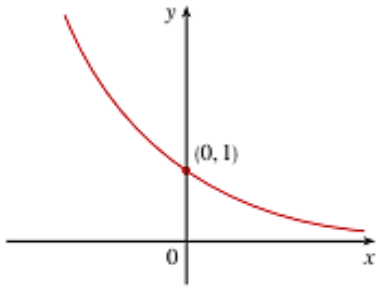
Funciones logarítmicas

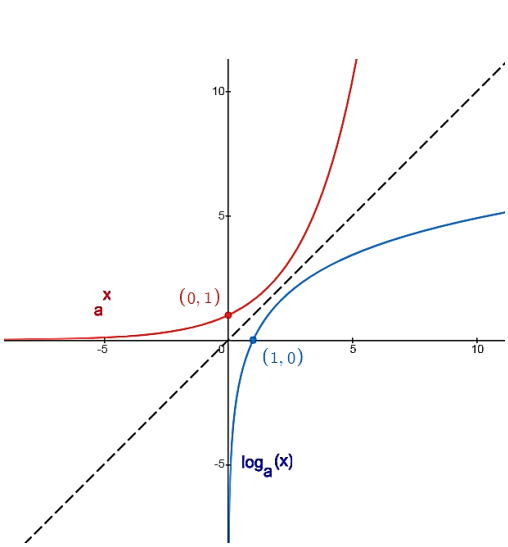
Con lo trabajado en la Actividad anterior, llegamos a la conclusión de que las funciones exponenciales:

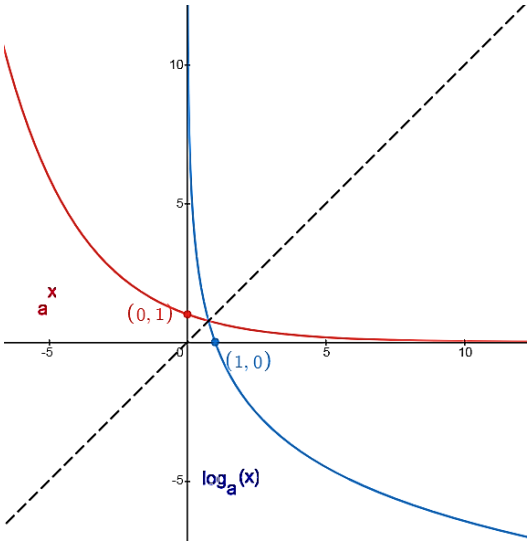
$$f(x) = a^x$$

Su dominio es *R*, que son monótonas crecientes o decrecientes según el valor de la base y que su imagen es $(0,+\infty)$

$f : R \rightarrow (0,+\infty)$ $f(x) = a^x$ *Si* $a > 1$	$f : R \rightarrow (0,+\infty)$ $f(x) = a^x$ *Si* $0 < a < 1$
	

En ambos casos, así su base sea mayor o menor a 1, es una función biyectiva, con lo cual tiene inversa, $f^{-1} : (0,+\infty) \rightarrow R$, su gráfico va a ser simétrico al gráfico de f respecto a la recta y = x, y dicha función recibe el nombre de logaritmo en base *a* de x, y se escribe: $f^{-1}(x) = \log_a x$





Ejercicio: Describí las características de la función logaritmo, en cuanto a crecimiento, positividad, ceros, asíntotas.

Ahora bien, ¿cuál es la operación que realiza el logaritmo en base a?

Teniendo en cuenta que es la inversa de la exponencial, se define:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

De ese modo, si $x > 0$, entonces $\log_a x$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para dar x. Por ejemplo, $\log_{10} 0.001 = -3$ porque $10^{-3} = 0.001$.

Otros ejemplos: i) $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

ii) $\log_3 9 = ...$ porque $3^{.....} = 9$ (completar)

iii) $\log_4 2 = ...$ porque (completar)

A partir de las propiedades conocidas de los exponenciales:

LEY DE LOS EXPONENTES Si a y b son números positivos y x y y son cualquier número real, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ 2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$

Se deducen propiedades para la operación inversa (intenta realizar dichas deducciones y si no sale consúltalo con tu profe)

LEYES DE LOS LOGARITMOS Si x y y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (donde r es cualquier número real)

Teniendo presente que al componer una función con su inversa nos da la función identidad, aplicando esto a $f(x) = a^x$ y a $f^{-1}(x) = \log_a x$ obtenemos:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para toda } x > 0$$

Una cuestión de notación: está claro que al trabajar con logaritmos hay que tener en claro cuál es la base de dicho logaritmo, y que se explicita en cada caso. Sin embargo hay dos casos en que, por ser los más usados (y son los que están en las calculadoras) se utiliza otra notación que da por supuesta el valor de la base:

- Para el $\log_{10} x$ se escribe simplemente $\log x$ y se suele decir logaritmo de x
- Parar el $\log_e x$ se escribe simplemente $\ln x$ y se lee logaritmo natural de x

Es decir :

$$\log x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$

EJERCICIOS

EJ1: Completar

i) $\log_2 \frac{1}{16} = ...$ ii) $\log 10^{-4} = ...$ iii) $\log_{1/2} 4 = ...$ iv) $\log_5 0{,}04 = ...$ v) $\log_5 \sqrt{5} = ...$

vi) $\ln e^2 = ...$ vii) $\log_\pi 1 = ...$ viii) $\log_3 \sqrt[3]{81} = ...$ ix) $\log \frac{1}{100} = ...$ x) $\log_{.....} 0{,}25 = -2$

xi) $\log_2 ... = -4$ xii) $\log_{1/3} ... = -2$ xiii) $\log_{\sqrt{2}} ..... = 8$ xiv) $\ln ..... = 1$

EJ2: Dar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

i) $\log(3x+10) = 2$

ii) $3 - 2\log_{\frac{1}{2}}(1-x) = 7$

iii) $\log_2 x + \log_2(3x+2) = 4$

iv) $\log_3 2x - \log_3(6x+6) = -2$

v) $\log_x(6-x) = 2$

vi) $\log_2 x - \log_4(x-2) = \frac{3}{2}$

EJ3: Dar el conjunto solución de:

a) $2^{5x} = 100$

b) $5.4^{x+2} = \frac{105}{2}$

c) $1024^3 = (\frac{1}{4})^{-x}$

d) $15 - e^{x+3} = 0$

EJ4. Hallar los puntos de intersección entre los gráficos delas funciones y las rectas indicadas en cada caso.

a) El gráfico de $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}-1$, con las rectas

i. El eje *x*. **ii.** El eje *y*. **iii.** La recta $x=-1$.

iv. La recta $y=-1$. **v.** La recta $y=-\frac{19}{27}$.

b) El gráfico de $f(x)=\ln(x+2)-1$, con las rectas

i. El eje *x*. **ii.** El eje *y*. **iii.** La recta $x=-1$.

iv. La recta $y=-1$. **v.** La recta $y=3$.

EJ5: Calcular la función inversa de las funciones dadas, indicando para la función y su inversa, el dominio, la imagen, las asíntotas:

a) $f(x)=2^{x+2}-1$ b) $f(x)=\ln(x+2)$ c) $f(x)=2e^{x}+3$ d) $f(x)=\log(2x)+2$

EJ6: Siendo la función exponencial $f(x)=M.a^{x}$, halle M y a sabiendo en cada caso que:

a) $f(0)=3 \ \wedge \ f(2)=6$

b) $f(-1)=\frac{1}{3} \ \wedge \ f(1)=6$

c) $f(2)=6 \ \wedge \ f(5)=48$

EJ7: Siendo la función exponencial $f(x)=M.a^{x}$, que cumple que

$f(-1)=6$ y $f(1)=\frac{2}{3}$, hallar la función inversa de *f*:

EJ8: Sean g una función exponencial y f una función lineal que cumplen:

$f(-1)=g(-1)=4$ y $f(1)=g(1)=1$. Hallar:

a) $fog(x)=$

b) Conjunto de ceros positividad y negatividad y asíntotas de $fog(x)$

EJ9: La mitosis es un proceso de duplicación celular mediante el cual una célula se divide en dos. La escherichia coli es una de las bacterias de más rápido crecimiento: se reproduce a sí misma en 15 minutos. Calcule en cuántas células se reproduce en 1 hora, y encuentre la función que describe el crecimiento de la cantidad de células en función del tiempo (medido en horas).

Calcule cuántas células habrá al cabo de 1 día.

EJ10: Las bacterias en una solución se duplican cada 3 minutos. Si hay 104 bacterias al comienzo del experimento. Cuántas bacterias hay después de

a) 3 minutos? b) 27 minutos? c) 1 hora? ,

Dar una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t

EJ 11: La población de una ciudad se triplica cada 50 años. En el tiempo t = 0 , esta población es de 100000 habitantes. Dar una fórmula para la población P(t) como función del tiempo t.

a) ¿Cuál es la población después de 100 años?

b) ¿En cuánto tiempo la población se duplica?

EJ12: Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento f (t) después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60.2^{-0,02.t}$

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?

b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?

c) ¿Qué cantidad queda después de 1000 años?

d) ¿En qué momento la cantidad se reduce a la mitad ?

EJ13: Una compañía está ampliando sus instalaciones y tiene opción entre dos modelos. Las funciones de costo para cada modelo son:

$C_1(x) = 3 + \log(2x + 2)$ y $C_2(x) = 1 + \log(60x + 1600)$

donde x es la cantidad de unidades que se producen por hora.

a) ¿Para cuántas unidades los dos modelos tienen los mismos costos?

b) Si se desea que los valores de la producción crezcan ilimitadamente, tomando valores tan grandes como se quiera ¿cuál modelo es más barato?

Hasta acá es la Actividad 9

Luego de esta, es necesario realizar una nueva Evaluación sobre los contenidos vistos: Homográficas, composición e inversa, y exponenciales y logarítmicas.