

Problema 20

Considera la parábola cuya fórmula es: $y = x^2 + 16x + 66$.

a) ¿En qué punto corta al eje Y?

Si bien podemos reemplazar x por 0 en la fórmula, notemos que podemos “leer” el resultado en la fórmula, ya que si $x = 0$ los dos primeros términos se anularán y obtenemos $y = 66$.

La parábola corta al eje Y en el punto (0; 66).

¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico al anterior?

Con lo que sabemos hasta acá, no conocemos el eje de simetría para encontrar “a ojo” el punto simétrico que nos piden.

Sin embargo, podemos hacer lo que quizás ya hiciste en las primeras actividades (actividad 2, por ejemplo). Podemos preguntarnos para qué otro valor de x la función vale 66. Para esto podemos plantear la ecuación:

$$66 = x^2 + 16x + 66$$

$$0 = x^2 + 16x$$

Estamos en la misma situación que en la actividad anterior, esto sabemos cómo resolverlo:

$$0 = x(x + 16)$$

Esta ecuación tiene solución si $x = 0$ o $x = -16$.

El punto simétrico buscado es (-16; 66)

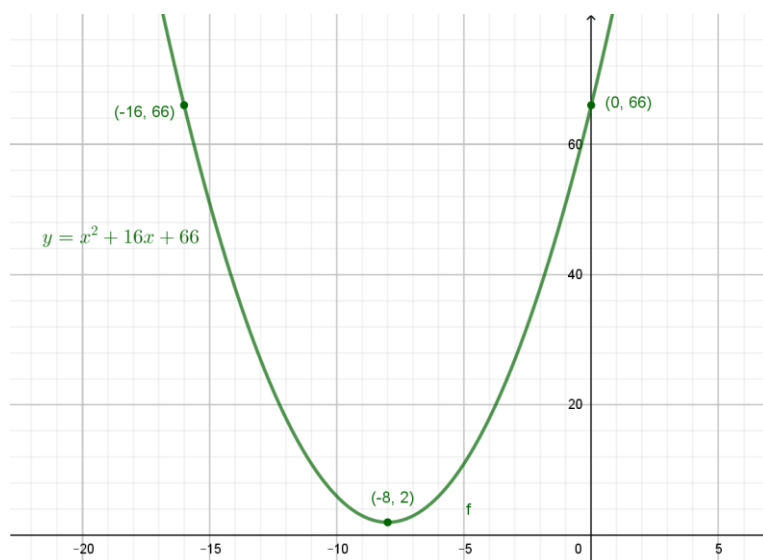
b) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

Tenemos dos puntos con la misma imagen (0; 66) y (-16; 66), por lo tanto, la abscisa de su vértice debe pasar por el punto medio de las abscisas de los puntos simétricos.

$$x_v = \frac{0 + (-16)}{2} = -8 \rightarrow y_v = 2$$

El vértice tiene coordenadas (-8; 2)

c) Realiza un gráfico aproximado de la parábola.



Problema 21

En todos los ejercicios a continuación podés utilizar la estrategia del problema anterior. Esto es:

- Encontrás dos puntos simétricos. Recordá que la ordenada al origen la podés leer en la fórmula.
- Hallás la abscisa del vértice como punto medio de las abscisas de los puntos conocidos.
- Calculás la ordenada del vértice usando la fórmula.

Hallá el vértice de las parábolas dadas por las fórmulas que siguen:

- a) $y = 2x^2 - 10x + 11,75$ vértice: $\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)$
- b) $y = x^2 - 3$ vértice: $(0; -3)$
- c) $y = x^2 + \frac{1}{2}x$ vértice: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}\right)$
- d) $y = -x^2 + 10x - 25$ vértice: $(5; 0)$
- e) $y = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ vértice: $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{9}\right)$
- f) $y = x^2 - 12x - 35$ vértice: $(6; -71)$

Problema 22

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 metros por segundo.

Se sabe que $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$, es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a) ¿A qué altura se encuentra la piedra 0,5 segundos después de que fue lanzada?

La altura pedida se obtiene reemplazando la fórmula por $t = 0,5$, con lo que obtenemos $h(0,5) = 15$.

Es decir que a los 0,5 segundos de ser lanzada la piedra está a 15 metros de altura.

b) ¿A qué altura se encuentra la ventana?

La altura de la ventana es la altura que tiene la piedra en el instante de ser lanzada. Es decir, si $t = 0$. Ese valor lo podemos leer en la fórmula, es 15, por lo que sabemos que **la ventana se encuentra a 15 metros de altura.**

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra y en qué momento la alcanza?

La altura máxima de la piedra es el valor máximo de h . Debemos usar las estrategias de los problemas anteriores.

Buscamos el otro momento en el cual la piedra se encuentra a 15 metros de altura. En el contexto del problema esto es cuando la piedra, cayendo, pasa por la ventana.

$$15 = -5t^2 + 10t + 15$$

$$0 = -5t^2 + 10t$$

$$0 = -5t(t - 2) \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = 2$$

En esos dos momentos la piedra tiene la misma altura, 15 metros. La altura máxima debe darse en el momento medio entre esos dos. Es decir, al segundo de ser lanzada.

La altura máxima alcanzada será entonces $h(1) = -5 + 10 + 15 = 20$

Es decir que la piedra alcanza una altura máxima de 20 metros.

Problema 23

Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la piedra del problema anterior, simultáneamente, desde el suelo, se lanza otra piedra con una velocidad de $20 \frac{m}{s}$.

Se sabe que en este caso $j(t) = -5t^2 + 20t$ es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra esta piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a) ¿En qué momento esta piedra vuelve a tocar el suelo?

En este caso queremos saber para qué valor de t , $j(t)$ vale 0. Esto ya lo hicimos en la actividad anterior (actividad 9).

$$\begin{aligned}j(t) = 0 &\Rightarrow 0 = -5t^2 + 20t \\0 &= -5t(t - 4) \Rightarrow t_1 = 0 ; t_2 = 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, esta segunda piedra toca el suelo a los 4 segundos de ser lanzada.

b) Una persona sentada dentro de la habitación, ¿puede ver pasar a esta piedra?

La pregunta equivale a preguntarse si la piedra alcanza una altura de, al menos, 15 metros. Podemos responder esta pregunta de diferentes maneras, una forma muy directa es continuar con el trabajo que estamos haciendo y deducir que si la piedra tenía la misma altura a los 0 y a los 4 segundos, debió alcanzar su altura máxima a los 2 segundos. Y dicha altura es de $j(2) = 20$. Por lo tanto, **podemos asegurar que una persona sentada en la habitación** (y mirando hacia la ventana 😊) **puede ver pasar a la piedra.**

c) ¿En algún momento las piedras alcanzan la misma altura? ¿A qué altura sucede esto?

La pregunta equivale a preguntarse si hay algún valor de t para el cuál las alturas de las dos piedras es la misma. Remarquemos este hecho, no solo queremos que las piedras se encuentren a la misma altura, si no que lo hagan en el mismo momento.

Este valor de t lo podemos calcular resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned}h(t) &= j(t) \\-5t^2 + 10t + 15 &= -5t^2 + 20t \\10t + 15 &= 20t \\15 &= 10t \\t &= 1,5\end{aligned}$$

Las piedras se hallan a la misma altura al segundo y medio.

d) ¿Dónde se encuentra la piedra que fue lanzada desde la ventana cuándo la que se lanzó desde el suelo alcanza la altura máxima?

En el ítem b, calculamos que la segunda piedra alcanza su altura máxima a los 2 segundos. Para conocer la altura de la primera piedra solo debemos reemplazar su fórmula por $t = 2$.

$$h(2) = -5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 = 15$$

Es decir, a los 15 metros de altura. Notemos que esto ya lo sabíamos por el problema 22 c).

