

## Función Cuadrática. Fórmula general resolvente.

En la actividad 11 tuvimos que averiguar los ceros de funciones dadas en forma polinómica, es decir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad [1]$$

donde  $a, b$  y  $c$  son números reales y  $a$  es distinto de cero.

Si en algún momento intentaron despejar una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

habrán notado que no es para nada evidente cómo hacerlo y, posiblemente, no hayan llegado a la solución. En este texto vamos a repasar las ideas de las últimas actividades para hallar una fórmula que nos permita encontrar las soluciones de esa ecuación, si las tuviera.

A lo largo de las últimas actividades, estuvimos desarrollando estrategias que nos permiten, en primer lugar, transformar una expresión polinómica en una canónica y, a continuación, calcular los ceros de la función. Vamos a aplicar estas ideas, pero en una función cuadrática cualquiera, como la expresada arriba.

Comencemos recordando que, en la expresión [1], podemos leer que la ordenada al origen de  $f$  es  $c$ , ya que  $f(0) = c$ . El otro valor de  $x$  cuya ordenada también vale  $c$  lo podemos hallar resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} f(x) &= c \\ ax^2 + bx + c &= c \\ ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \text{ y} \\ ax_2 + b &= 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Es decir, ahora sabemos que  $f(0) = f\left(-\frac{b}{a}\right) = c$ . Como tenemos valores de  $x$  con la misma imagen, sabemos que la abscisa del extremo de la función (máximo o mínimo) debe estar a igual distancia de las dos abscisas encontradas. La calculamos:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} \quad [2]$$

Para calcular la ordenada del extremo nos arremangamos y hacemos las cuentas reemplazando en [1]:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$\text{Como } y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = -\frac{b^2}{4a} + c \quad [3]$$

Ahora podemos expresar  $f(x)$  en forma canónica. Usando los resultados [2] y [3] podemos expresar  $f$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) \\ f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Aclaremos por qué el parámetro  $a$  (que aparece en la forma polinómica) es el mismo que aparece en la forma canónica de una función.

Consideremos una función cuadrática expresada en forma canónica y desarrollémosla para expresarla en forma polinómica:

$$g(x) = a(x - p)^2 + q = a(x^2 - 2xp + p^2) + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

Notemos que las expresiones  $-2ap$  y  $ap^2 + q$  corresponden a dos números reales y los podemos reemplazar por dos parámetros como  $b$  o  $c$  en la expresión [1]. Pero el valor de  $a$ , el número que aparece multiplicado al término con una expresión al cuadrado, es el mismo en las dos formas.

Por lo tanto, partiendo de la fórmula polinómica y averiguando las coordenadas del vértice de su gráfica podemos obtener la forma canónica de la función tal como lo hicimos arriba.

Por estar expresada en forma canónica sabemos cómo calcular los ceros de la función (en el caso que los tenga):

$$f(x) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \quad \text{Sumamos } \frac{b^2}{4a} - c \text{ en ambos miembros}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) \quad \text{Dividimos ambos miembros por } a, \text{ cosa que podemos hacer porque } a \neq 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \text{Trabajemos un poco con el segundo miembro...}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot 4a}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

En este punto debemos prestar mucha atención. Ahora se decidirá si la ecuación tiene solución o no. Sabemos que el primer miembro es positivo por ser una expresión al cuadrado. La ecuación tendrá solución siempre y cuando el segundo miembro también sea positivo. El denominador del segundo miembro también es siempre positivo (4 por una expresión al cuadrado). Por lo tanto, la ecuación tendrá solución si y solo si el numerador es positivo o cero. Es decir, si:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Si esa expresión es positiva, podemos tomar raíz cuadrada a ambos miembros para obtener:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### En resumen:

Cuando tengamos una función expresada de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (o una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ) donde  $a, b$  y  $c$  son números reales y  $a$  es distinto de cero; si se verifica que  $b^2 - 4ac \geq 0$ , entonces las raíces de esa función vienen dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A estas expresiones se las conoce como fórmula general resolvente de una ecuación cuadrática.

### Observaciones:

- Para abreviar la notación se suele expresar a las soluciones de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

entendiendo que para una solución se usa el signo positivo y para la otra el signo negativo.

- A la expresión  $b^2 - 4ac$  se la conoce como **discriminante de la ecuación cuadrática**. Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene solución.
- La expresión **[2]** nos da una fórmula para obtener la abscisa del extremo de la función a partir de los valores de  $a$  y  $b$  de la fórmula **[1]**.
- Notemos que en el caso que el discriminante sea cero, las dos soluciones de la ecuación son iguales. Es decir:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Expresión que corresponde a la abscisa del extremo. Gráficamente, esto significa que el vértice es la raíz de la función.

- En un momento de la deducción, llegando al final, reemplazamos  $\sqrt{4a^2}$  por  $2a$  cuando correspondía considerar los casos  $2a$  y  $-2a$ . Sin embargo, estas dos posibilidades en el signo del segundo miembro son tenidas en cuenta al separar el módulo. Es decir, hay solo dos posibilidades, que el segundo miembro sea positivo o negativo.

