

Práctica 6: Teorema del Valor Medio

Ejercicio 1

- a) Considere la función $f(x) = x^{2/3}$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función es continua sobre este intervalo y $f(-1) = f(1)$. Sin embargo, su derivada no se anula nunca. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?
- b) Sea $f(x) = x^3 + 3x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Pruebe que en $x_0 = 0$ f no tiene extremo y que $f'(0) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Fermat?

Ejercicio 2 Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ y cualquier intervalo cerrado, por ejemplo el $[-1, 3]$. Compruebe que el valor $c \in (-1, 3)$ al que hace referencia el Teorema del Valor Medio es calculable en este caso.

Ejercicio 3 Pruebe las siguientes identidades

$$a) \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad b) \ln(x^a) = a \ln(x)$$

(**Ayuda:** use que si dos funciones f y g tienen la misma función derivada, entonces $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.)

Ejercicio 4 Pruebe que la única solución de la ecuación

$$f'(x) = 2f(x), \quad f(0) = 1,$$

es $f(x) = e^{2x}$. (**Ayuda:** si $u(x)$ es solución de la ecuación estudie la derivada de $h(x) = \frac{u(x)}{e^x}$.)

Ejercicio 5 Para las siguientes funciones, pruebe que el gráfico corta al eje x sólo una vez.

- a) $f(x) = -3x + \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$, $x > 1$
- c) $f(x) = x + \ln(x)$, $x > 0$
- d) $f(x) = x^{2n+1} + x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - 2$, $x > 0$

Ejercicio 6 Sea $R(x)$ una función con 3 derivadas continuas en $x = 0$ y tal que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. Pruebe que $\frac{R(x)}{x^3} = \frac{R'''(c)}{3!}$ para algún c entre 0 y x . (**Ayuda:** use el Teorema de Cauchy 3 veces.)

Ejercicio 7 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)} - 1}{x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 1 + \cos x}{3x + \operatorname{sen} x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(x-3)^2 \ln(x-3)}{x-4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1) + x^2 - 4}{x-2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)e^{x^2}}{x^2 - 1}$$

Ejercicio 8 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^2}{x^2 + 7x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2^x)^{\operatorname{sen}(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$$

Ejercicio 9 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) (e^x - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(7x) + 2x^2 \ln x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$$

Ejercicio 10 Mediante los cocientes incrementales correspondientes, decida si las siguientes funciones son derivables en el punto indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)} - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -3\pi & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(7x) + 2x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 7x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 1 + \cos x}{3x + \operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

Ejercicio 11 Para las siguientes funciones, encuentre a para que f resulte continua. Para el valor de a hallado, decida si la función resulta derivable en el punto indicado.

$$a) \quad f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 10 + 6\sqrt{x}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1.$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5 \cos(6x) - a}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{ax + 3 - 3 \cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

Ejercicio 12 Explique por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

Ejercicio 13 Muestre por qué no es posible utilizar la Regla de L'Hospital para calcular el límite indicado en cada caso y encuentre el límite por otros medios

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \qquad c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

Ejercicio 14 Justifique las siguientes afirmaciones

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x + \cos x} = 1$$

Ejercicio 15 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Entonces, en $x = 0$

- ☐ f es continua pero no derivable.
☐ f es continua y derivable.
☐ f no es continua pero si es derivable.
☐ f no es ni continua ni derivable.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3^{5x + \cos(2x)} + 8x + \ln((4x + 1)^{-2}).$$

Pruebe que $f(x) \neq 1 \forall x \geq 0$.

Ejercicio 2 Considere $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\ln(x) - 2, \forall x > 0$. Pruebe que existe la función inversa f^{-1} y calcule $(f^{-1})'(2)$ (Observe que $f(1) = 2$.)

Ejercicio 3 Sea f una función continua y derivable tal que $f(-2) = f(5) = 0$. Púebse que existe un $c \in (-2, 5)$ tal que $f'(c) = 200f(c)$

Ayuda: considere $g(x) = e^{-200x}f(x)$.

Ejercicio 4 Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Pruebe que $2^{h(x)-5} + 3x \neq \sin(x) \forall x \geq 0$.

Ejercicio 5 Púebe la siguiente desigualdad

$$x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geq 12x - 6, \quad x \geq 1$$

Ejercicio 6 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{8x^2 + a(1 - \cos(x))}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Encuentre el valor de a para que f resulte derivable en $x = 0$ y además sea $f'(0) = 3$.

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con dos derivadas continuas tal que $f(0) = 2, f'(0) = \frac{5}{6}, f''(0) = 5$. Se define $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en la forma

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{f(6x) - 2}{5x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \ell(x)$ y $\ell'(0)$.

Ejercicio 8 Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$. Pruebe que es biyectiva y que $f^{-1}(3) = 0$. Calcule

$$\lim_{y \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y - 6}$$