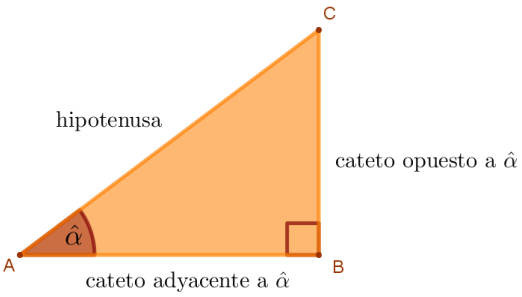
Funciones Trigonométricas

Introducción

El objetivo de esta unidad es presentar las funciones trigonométricas seno y coseno y comenzar su estudio. Sus fórmulas son:

$$f(x) = sen(x) \qquad f(x) = cos\,(x) \qquad [1]$$

Seguramente recuerden las definiciones de las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo que aprendimos en tercer año. Por las dudas, recordémoslas:



En un triángulo rectángulo, definimos las siguientes relaciones trigonométricas para uno de los ángulos no recto del triángulo:

$$sen(\hat{\alpha}) = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

$$cos(\hat{\alpha}) = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

$$tg(\hat{\alpha}) = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}$$

Si comparamos estas definiciones con las fórmulas en [1], es inevitable preguntarse qué significa la variable x en la fórmula ¿Se trata de un ángulo o de un número real?

Hasta acá, cuando presentamos funciones, la variable independiente corresponde a un número real, pero las relaciones trigonométricas se definen para ángulos.

Por otra parte, los ángulos pueden tomar valores entre 0° y 90° en un triángulo rectángulo. A lo sumo, valores entre 0° y 360° en un polígono cualquiera. ¿Definiremos funciones para valores entre 0 y 360? Y podemos preguntarnos también ¿Cuál es el interés de estas funciones?

Avancemos un paso por vez. Para empezar, necesitamos revisar lo que sabemos de ángulos.

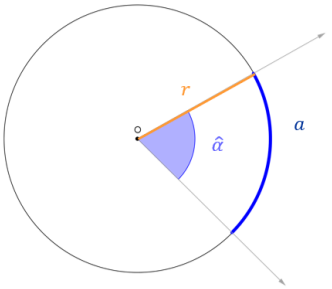
Sistema circular de medición de ángulos y ángulos orientados

Comencemos definiendo un nuevo sistema de medición de ángulos.

Video de presentación del sistema circular

En resumen,

- En el sistema circular, la medida del ángulo central de una circunferencia está determinada por el cociente entre la longitud del arco que el ángulo subtiende y la longitud del radio de la circunferencia.



- Por tratarse de un cociente entre dos longitudes es adimensional.
- El ángulo que mide 1 en este sistema se conoce como *radian* y es la medida del ángulo que subtiende un arco de igual longitud que el radio de la circunferencia. Si un ángulo mide $\frac{\pi}{2}$ en este sistema, decimos que mide $\frac{\pi}{2}$ radianes.
- La siguiente tabla da las equivalencias de algunos ángulos usuales:

Sistema sexagesimal	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sistema circular	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

- Para convertir un ángulo cualquiera de una unidad a la otra, simplemente podemos utilizar la siguiente proporción, donde $s°$ corresponde a la medida del ángulo en grados sexagesimales y r la medida en radianes:

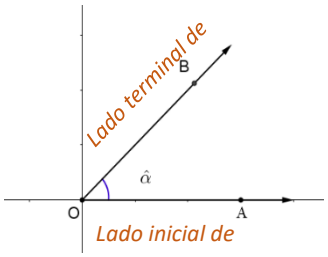
$$\frac{s°}{180°} = \frac{r}{\pi}$$

Por otro lado, es posible ampliar nuestro uso de los ángulos, pudiendo pensar en ángulos mayores a un giro o incluso en ángulos de amplitud negativa.

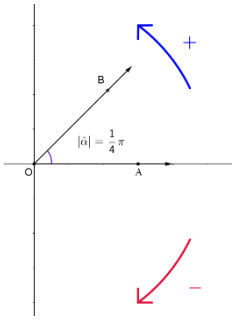
Video de ángulos orientados

En resumen,

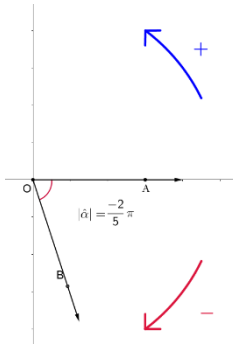
- Consideramos ángulos formados por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen.



- Si el lado terminal gira en sentido antihorario, la amplitud del ángulo es positiva. Si gira en sentido horario es negativa.

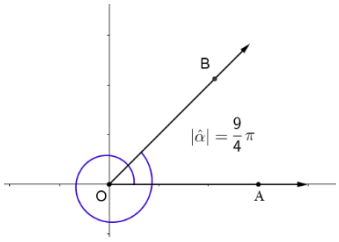


Ángulo de amplitud positiva

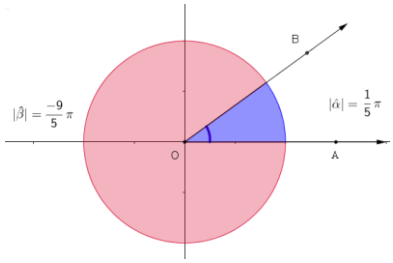


Ángulo de amplitud negativa

- De esta forma, también es posible considerar ángulos con amplitud mayor a 2π (un giro):



- Dos ángulos con el mismo lado terminal se dicen ángulos coterminales:



- Como los ángulos son generados por la rotación de una semirrecta sobre el origen, es posible hallar una cantidad infinita de ángulos coterminales a partir de uno dado. Por ejemplo, los siguientes amplitudes dan ángulos coterminales con $\frac{1}{4}\pi$. El conjunto se forma sumando o restando sucesivas veces 2π al ángulo:

$$\left\{\ldots; -\frac{23}{4}\pi; -\frac{15}{4}\pi; -\frac{7}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi; \frac{17}{4}\pi; \ldots\right\}$$

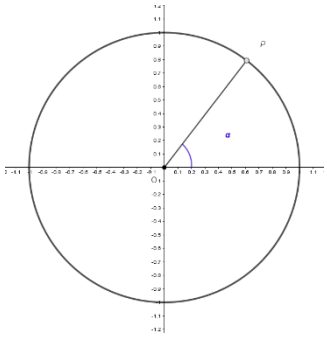
Funciones trigonométricas

Ahora sí, estamos en condiciones de definir las funciones seno, coseno y también definiremos la función tangente. También podemos hacer unas primeras indagaciones.

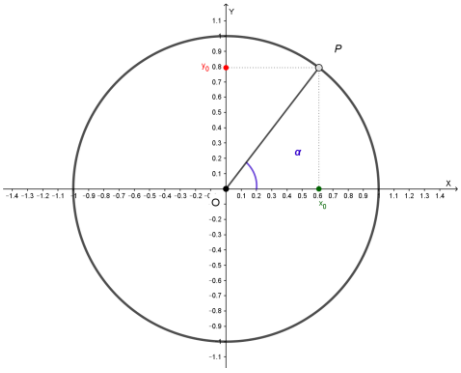
Ver video con las definiciones de las funciones trigonométricas

En resumen,

- *Circunferencia trigonométrica:* circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. En ella ubicamos un punto P de coordenadas (x_0, y_0) que se mueve libremente. Consideramos también el ángulo orientado $\hat{\alpha}$ determinado por el semieje positivo de las X y la semirrecta OP.



- En esta circunferencia, vamos a definir el *seno del ángulo* $\hat{\alpha}$ como la ordenada del punto P, al *coseno del ángulo* $\hat{\alpha}$ como la ordenada del P y a la *tangente del ángulo* $\hat{\alpha}$ como al cociente entre la ordenada y la abscisa de P.



- Una inspección rápida de estas definiciones nos permite calcular los valores que toman las funciones trigonométricas para algunos ángulos particulares, a partir de las coordenadas del punto P.

$\hat{\alpha}$	Coordenadas de P	$sen(\hat{\alpha})$	$cos(\hat{\alpha})$	$tg(\hat{\alpha})$
0	$(1;0)$	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0;1)$	1	0	No definida
π	$(-1;0)$	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	$(0;-1)$	-1	0	No definida

- El seno y el coseno son funciones que están acotadas entre los valores de -1 y 1.

$$-1 \leq sen(\hat{\alpha}) \leq 1$$
$$-1 \leq cos(\hat{\alpha}) \leq 1$$

- Los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante son:

	Cuadrante			
	I	*II*	*III*	*IV*
$sen(\hat{\alpha})$	positivo	positivo	negativo	negativo
$cos(\hat{\alpha})$	positivo	negativo	negativo	positivo
$tg(\hat{\alpha})$	positivo	negativo	positivo	negativo

Valores trigonométricos conocidos

La siguiente tabla muestra valores trigonométricos de seno y coseno de ángulos particulares en el primer cuadrante. Usando esta tabla se puede averiguar el valor trigonométrico de ángulos equivalentes en los otros cuadrantes sin usar la calculadora.

Para ver la explicación de valores trigonométricos conocidos debés entrar al siguiente link: https://youtu.be/PDhA6Nhuh6U

En el primer cuadrante:

Sexagesimal	30°	45°	60°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Reducción al primer cuadrante

Un ángulo puede estar situado en cualquiera de los cuatro cuadrantes de la circunferencia. Los valores de sus correspondientes razones trigonométricas dependerán de su posición.
Cuando un ángulo se encuentra situado en el segundo, tercer o cuarto cuadrante siempre es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas líneas trigonométricas tengan los mismos valores absolutos.

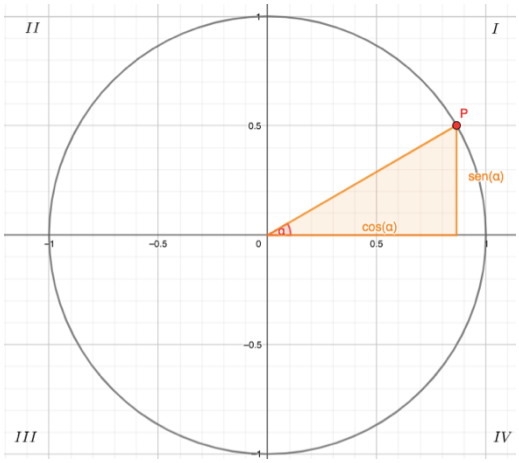
Para ver la explicación de reducción al primer cuadrante debés entrar al siguiente link: https://youtu.be/OXsgUxZy0-A

- Ángulos en el primer cuadrante:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

La componente en y del punto P representa el $seno$ del ángulo y la componente en x del punto P representa el coseno del ángulo:

$$y = sen(\alpha)$$
$$x = cos(\alpha)$$

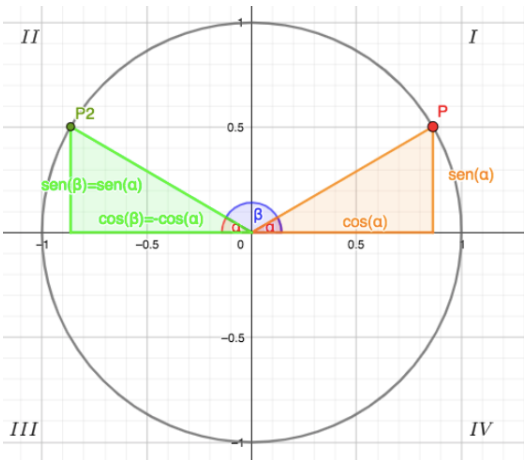


- Ángulos en el segundo cuadrante:

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$
$$\beta = \pi - \alpha$$

$$sen(\beta) = sen(\pi - \alpha) = sen(\alpha)$$

$$cos(\beta) = cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$$

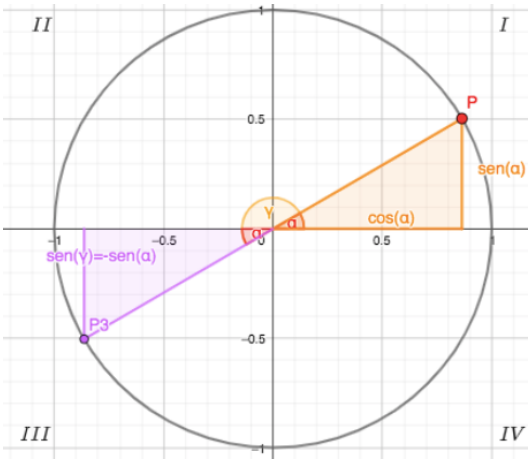


- Ángulos en el tercer cuadrante:

$$\pi < \gamma < \frac{3}{2}\pi$$
$$\gamma = \pi + \alpha$$

$$sen(\gamma) = sen(\pi + \alpha) = -sen(\alpha)$$

$$cos(\gamma) = cos(\pi + \alpha) - cos(\alpha)$$



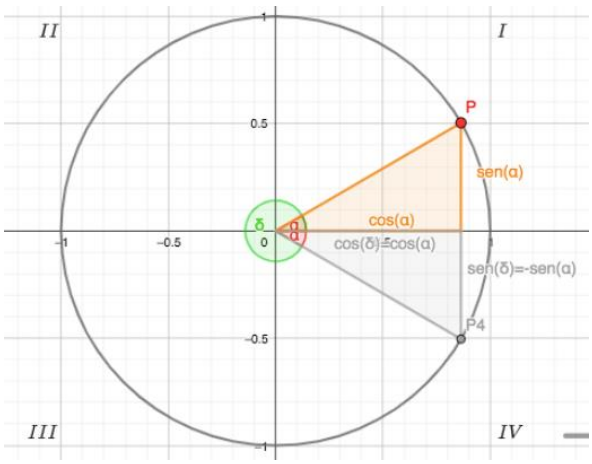
- Ángulos en el cuarto cuadrante:

$$\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$$

$$\delta = 2\pi - \alpha$$

$$sen(\delta) = sen(2\pi - \alpha) = -sen(\alpha)$$

$$cos(\delta) = cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$$



Ecuaciones trigonométricas

Para poder resolver ecuaciones hay que tener en cuenta la circunferencia trigonométrica. La solución de una ecuación trigonométrica puede tener más de una solución.

Para ver la explicación sobre ecuaciones trigonométricas dedés entrar al siguiente link: https://youtu.be/p4zb7v7uOCU

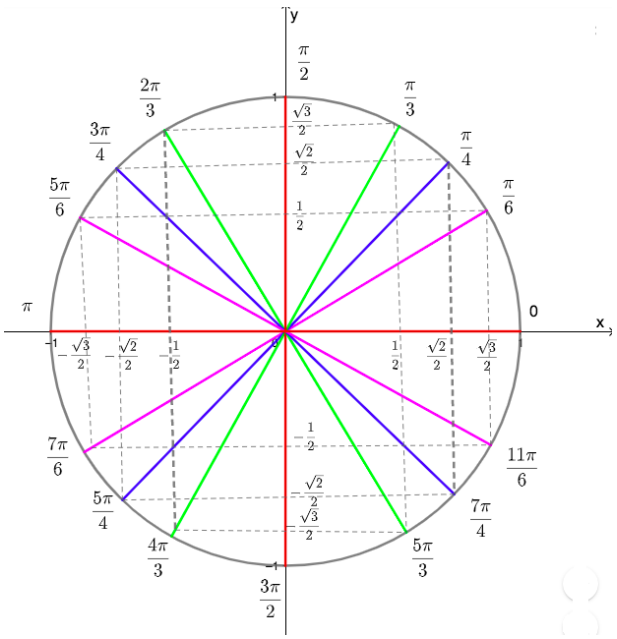
Consideremos ángulos entre 0 y 2π:

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

Veamos los siguientes ejemplos:

$$1)\ sen(x) = \frac{1}{2}$$

Quisiera averiguar el valor de x de forma tal que su *seno* dé $\frac{1}{2}$. Si observo la tabla en el primer cuadrante, veo que el *seno* de un ángulo es $\frac{1}{2}$ para $\frac{\pi}{6}$. Pero también debo tener en cuenta que el *seno* es positivo en el segundo cuadrante. Para poder hallar el ángulo equivalente a $\frac{\pi}{6}$ en el segundo cuadrante debo resolver la diferencia $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.



Así los dos valores que tienen como $seno$ igual a $\frac{1}{2}$ son:

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

$$2)\ cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En este caso debo considerar en qué cuadrantes el $coseno$ es negativo. Ellos son el segundo y tercer cuadrantes.

Quisiera averiguar el valor de x de forma tal que su $coseno$ dé $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si observo la tabla en el primer cuadrante, veo que el $coseno$ de un ángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ para $\frac{\pi}{6}$. Para poder hallar el ángulo equivalente a $\frac{\pi}{6}$ en el segundo y tercer cuadrante debo resolver los siguientes cálculos:

Para el segundo cuadrante: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Para el tercer cuadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

Así los dos valores que tienen como $coseno$ igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ son:

$$x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi$$

$$3)\ sen(x) = -1$$

Quisiera averiguar, en este caso, el valor de x de forma tal que su $seno$ dé -1.

Sé que el $seno$ de un ángulo corresponde a la componente en y del ángulo representado. Como se trata de $y = -1$ debe corresponder al ángulo límite entre el tercer y cuarto cuadrante. Ese ángulo corresponde al de tres rectos. Así la única solución es:

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

■