

TRIGONOMETRÍA

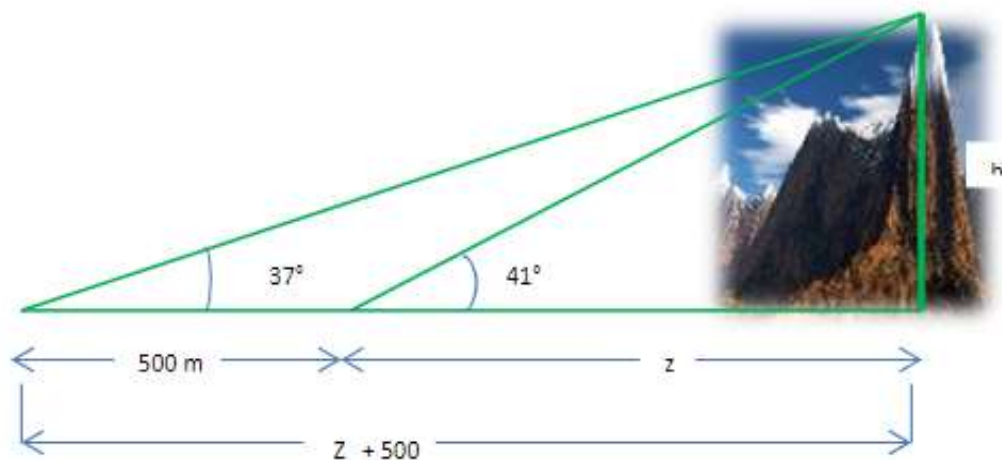
En esta semana les proponemos problemas donde el cálculo de las incógnitas no es inmediato, sino que se debe plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS RESUELTOS

Como en la guía anterior al final de cada ejemplo resuelto tendrán un link donde pueden ver el ejercicio explicado, pero en este caso la resolución será utilizando otro camino al mostrado en el texto, de modo que dispongan de distintas formas de resolver un mismo ejercicio.

- Un topógrafo utiliza un instrumento denominado teodolito para medir el ángulo de elevación entre la cima de la montaña y el nivel del suelo. En un punto, el ángulo de elevación mide 41° , 500 metros más lejos de la base de la montaña el ángulo de elevación es de 37° . ¿Cuánto mide la montaña?

- 1) Realizamos una **figura de análisis** que grafique el problema, y **volcamos en ella los datos y las incógnitas**



- 2) Analizamos el gráfico para identificar **cuál de las razones trigonométricas podemos utilizar** para resolver el problema en función de los datos que tenemos.

En los dos triángulos formados conocemos uno de los ángulos agudos y debemos relacionar los catetos, por lo tanto, aplicamos la tangente. Es decir:

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{z + 500} \qquad \operatorname{tg} 41^\circ = \frac{h}{z}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo cual hay que resolver un sistema de ecuaciones, se puede utilizar el método que prefieran. En este caso utilizaremos el método de sustitución.

$$\operatorname{tg} 37^{\circ} = \frac{h}{z + 500}$$

$$\operatorname{tg} 41^{\circ} = \frac{h}{z} \Rightarrow z = \frac{h}{\operatorname{tg} 41^{\circ}}$$

Despejamos z de la segunda ecuación y la reemplazamos en la primera

$$\operatorname{tg} 37^{\circ} = \frac{h}{z + 500} \Rightarrow \operatorname{tg} 37^{\circ} = \frac{h}{\frac{h}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} + 500} \Rightarrow \operatorname{tg} 37^{\circ} \left(\frac{h}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} + 500 \right) = h$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 37^{\circ} \frac{h}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} + \operatorname{tg} 37^{\circ} \cdot 500 = h \Rightarrow \operatorname{tg} 37^{\circ} \cdot 500 = h - \frac{\operatorname{tg} 37^{\circ}}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} h$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 37^{\circ} \cdot 500 = h \left(1 - \frac{\operatorname{tg} 37^{\circ}}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} \right) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 37^{\circ} \cdot 500}{\left(1 - \frac{\operatorname{tg} 37^{\circ}}{\operatorname{tg} 41^{\circ}} \right)} = h \Rightarrow h = 2830,03$$

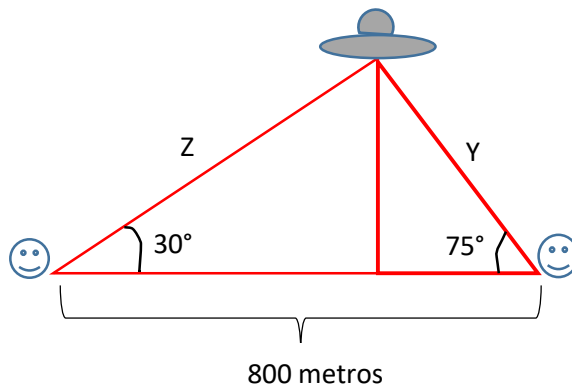
La altura de la montaña es 2830,03 metros

Si querés ver la explicación del ejercicio clickea el siguiente link:

<https://youtu.be/GHJiMBZZuHw>

- **Dos amigos aficionados a los fenómenos paranormales han creído ver un OVNI. En ese instante se encontraban a 800 metros uno del otro, y dijeron que el objeto se encontraba entre ellos con ángulos de elevación de 30° y 75° respectivamente. Se quiere saber:**
- ¿A qué altura estaría el OVNI?**
 - ¿Y a qué distancia de cada amigo?**

1) Realizamos una **figura de análisis** que grafique el problema, y **volcamos en ella los datos y las incógnitas**



X: altura a la cual estaría el OVNI

Z: distancia del OVNI al 1er. Amigo

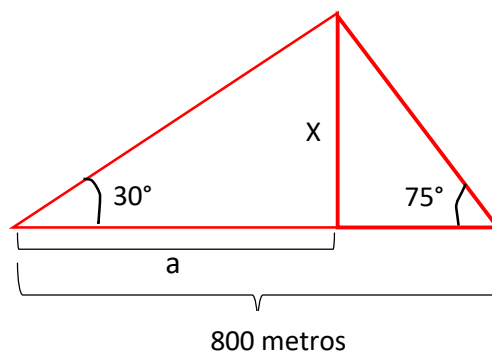
Y: distancia del OVNI al 2do. Amigo

2) Analizamos el gráfico para identificar **cuál de las razones trigonométricas podemos utilizar** para resolver el problema en función de los datos que tenemos.

- Cálculo de la altura a la cual se encontraría el OVNI

En este caso, el problema involucra el análisis de dos triángulos rectángulos. Conocemos el valor de los ángulos de elevación (30° y 75°) y la distancia que separa a los dos amigos (suma de las medidas de dos catetos). La incógnita es la altura a la cual se encontraría el OVNI, es decir, la medida de otro cateto de los triángulos del problema.

La razón trigonométrica que vincula la medida de los catetos es la tangente. Si llamamos **a** al cateto mayor del triángulo de la izquierda, resulta:



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{a} \qquad \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{x}{800 - a}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo cual hay que resolver un sistema de ecuaciones, se puede utilizar el método que prefieran. En este caso utilizaremos el método de igualación.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = x \\ \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{x}{800 - a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 75^\circ (800 - a) = x \end{aligned}$$

Despejamos x de ambas ecuaciones y las igualamos

$$a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ (800 - a)$$

$$a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ \cdot 800 - \operatorname{tg} 75^\circ a$$

$$a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ a = \operatorname{tg} 75^\circ \cdot 800$$

$$(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ) a = \operatorname{tg} 75^\circ \cdot 800$$

$$a = \frac{\operatorname{tg} 75^\circ \cdot 800}{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ}$$

Hacemos los cálculos aplicando la calculadora

$$a = 692,82$$

La medida del cateto a es de 692,82 metros, y podemos reemplazar este valor para obtener la medida de la altura del OVNI:

$$x = \operatorname{tg} 30^\circ a \Rightarrow x \cong 400$$

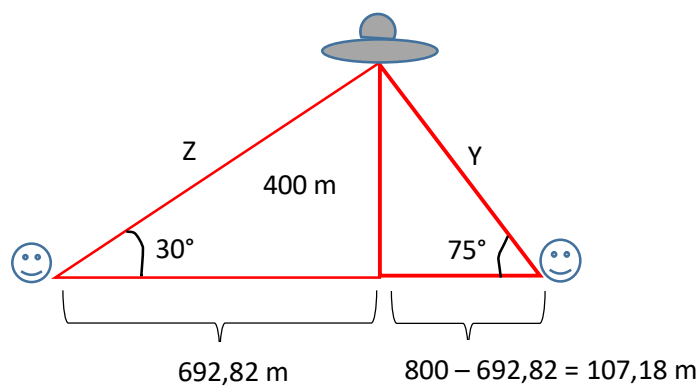
El OVNI estaría a una altura aproximada de 400 metros.

Si querés ver la explicación del ejercicio clickea el siguiente link:

https://youtu.be/V0TZfX_v0oo

- Cálculo de la distancia del OVNI a cada uno de los amigos.

1) Realizamos una nueva **figura de análisis** que grafique el problema, y **volcamos en ella los nuevos datos y las incógnitas**



Para encontrar la distancia desde el OVNI hasta cada uno de los amigos, podemos realizarlo de distintas maneras, ya que contamos con varios datos de cada uno de los triángulos.

Por ejemplo, en el triángulo de la izquierda conocemos el valor de cada uno de los catetos, por lo cual podemos encontrar la medida de la hipotenusa (la incógnita Z) aplicando el **Teorema de Pitágoras**:

$$Z^2 = 692,82^2 + 400^2 = 639999,55$$

$$Z = \sqrt{639999,55} \cong 800$$

La distancia del OVNI al primer amigo es de 800 metros

Si querés ver la explicación del ejercicio clickea el siguiente link:

https://youtu.be/spaGe_kNZqI

En el triángulo de la derecha podemos utilizar otra forma de cálculo para hallar el valor de Y. En este caso, conocemos el valor del ángulo de 75° y la medida de su cateto opuesto, de 400 metros. La incógnita es la hipotenusa del triángulo. **La razón trigonométrica que vincula el cateto opuesto y la hipotenusa es el seno.** Por lo tanto:

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{400}{Y}$$

Utilizando la calculadora, podemos hallar el seno de 75°

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{400}{Y} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ Y = 400 \Rightarrow Y = \frac{400}{\text{sen } 75^\circ} = 414,11$$

La distancia del OVNI al segundo amigo es de 414,11 metros.

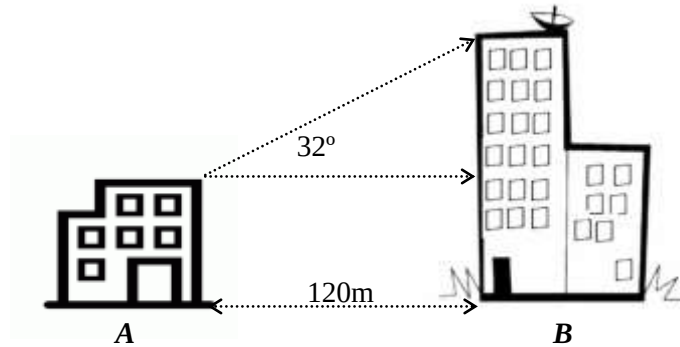
Si querés ver la explicación del ejercicio clickea el siguiente link:

<https://youtu.be/6z8gKAr7j94>

EJERCICIOS PROPUESTOS

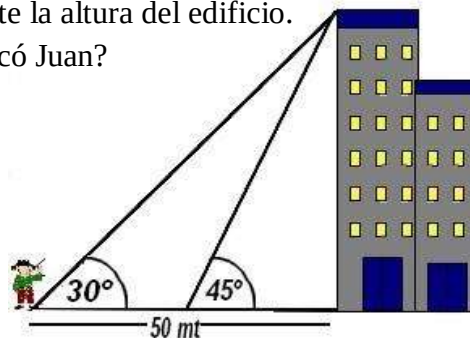
7. La distancia entre los edificios **A** y **B** es de 120m. Si el edificio **A** mide 98m de altura y el ángulo de elevación desde el punto más alto del edificio **A** al punto más alto del edificio **B** es de 32° .

Calculá, aproximadamente, la altura del edificio **B**.



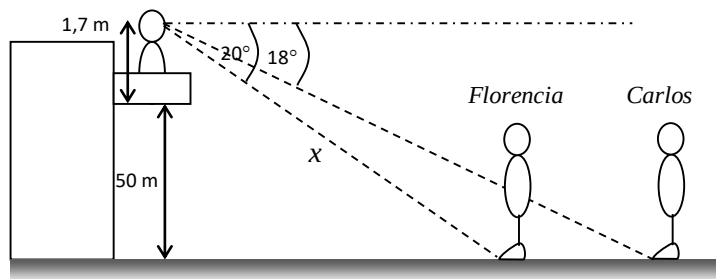
8. Juan está parado a 50 metros del pie de un edificio. Desde allí observa el techo del edificio con un ángulo de elevación de 30° , si se acerca unos metros el ángulo de elevación con que lo observa es 45° .

- Calculá aproximadamente la altura del edificio.
- ¿Cuántos metros se acercó Juan?



9. Parado en un balcón a 50 metros de la calle, Fabricio observa a dos amigos, Florencia y Carlos, con ángulos de depresión de 20° y 18° respectivamente como muestra la figura. Si sabemos que Fabricio mide 1,7 m de altura,

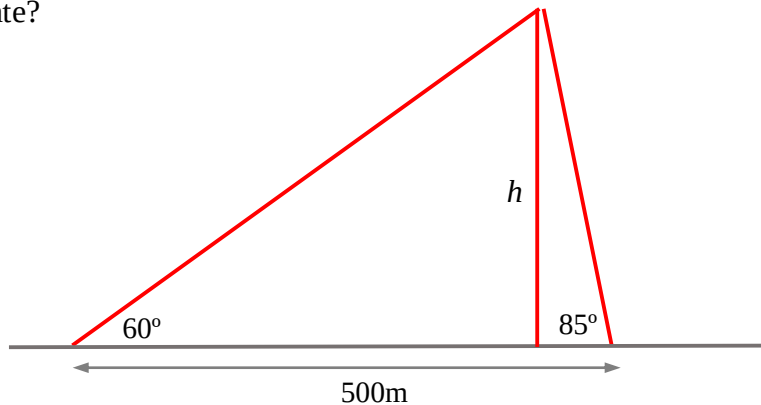
- calculá la distancia x indicada en la figura.
- ¿a qué distancia están Florencia de Carlos?



10. Dos observadores se encuentran a una distancia de 4km. En el plano vertical que pasa por ellos hay un globo, al cual ambos ven bajo ángulos de 40° y 50° respectivamente. Calculá la distancia del globo a cada observador y la altura a la que está sobre el suelo.

11. En un instante dado dos amigos que se encuentran a 500m de distancia como se observa en el dibujo observan un avión con un ángulo de elevación de 60° y 85° respectivamente.

¿A qué altura h se encuentra el avión en ese instante?



12. Desde un bote se ve la cima de una montaña de 1200 mts de altitud, 5° por encima de la horizontal. El bote se acerca en línea recta hacia la montaña y, un poco después, éste se ve 8° por encima del horizonte. ¿Qué distancia ha recorrido el bote?

13. Desde un barco que está cerca de la costa se divisa un faro en lo alto de un acantilado. El faro tiene una altura de 20 mts. La recta que une el barco con el pie del faro forma un ángulo de 10° con la horizontal. La recta que une el barco con el extremo superior del faro forma un ángulo de 12° con la horizontal. Determinar la altura del acantilado y la distancia del barco a la costa.