Funciones Trigonométricas

Esta semana comenzaremos a estudiar con más detalle las funciones seno y coseno.

Analizaremos sus dominios, imágenes, conjuntos de ceros, valores máximos y mínimos, conjuntos de positividad y negatividad e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Presentaremos sus gráficas y avanzaremos con el estudio de funciones de la forma:

$$f(x) = a.sen(bx) \qquad f(x) = a.cos\,(bx)$$

siendo a y b números reales no nulos.

Es importante que, para trabajar los temas de esta semana, hayas leído y mirado el material de la semana pasada y resuelto la actividad 1.

La función seno

Comencemos analizando la función seno tomando como punto de partida lo realizado la semana pasada:

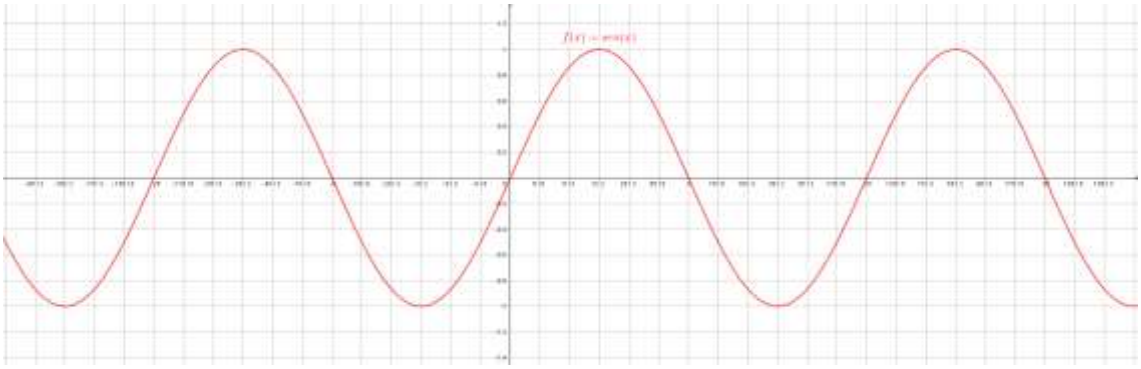
Video de la función $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$

En resumen,

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$:

- $\mathrm{Dom}f = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}f = [-1; 1]$
- $C^0 = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \wedge\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$
- La función alcanza máximo en 1 para $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge\ k \in \mathbb{Z}\right\} =$ $= \{\ldots, -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \ldots\}$
- La función alcanza mínimo en -1 para $x \in \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \wedge\ k \in \mathbb{Z}\right\} =$ $= \{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ldots\}$
- Sus conjuntos de positividad y negatividad son:
  - ✓ $C^+ = \cdots \cup (-2\pi; -\pi) \cup (0; \pi) \cup (2\pi; 3\pi) \cup \ldots$
  - ✓ $C^- = \cdots \cup (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi) \cup (3\pi; 4\pi) \cup \ldots$
- Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento son:
  - ✓ $C^{\uparrow} = \cdots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \cup \ldots$
  - ✓ $C^{\downarrow} = \cdots \cup \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right) \cup \ldots$

Su gráfico es:



La función coseno

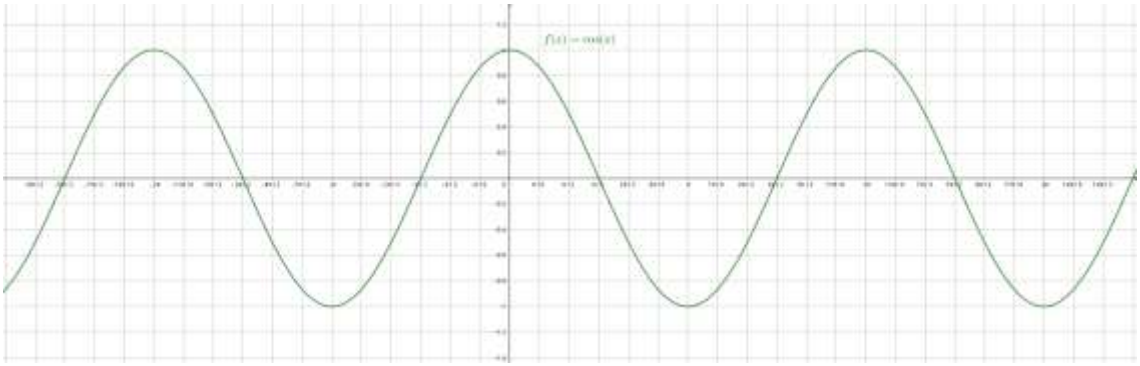
Video de la función $f(x) = cos(x)$

En resumen,

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = cos(x)$:

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- $\text{Im} f = [-1; 1]$
- $C^0 = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\ldots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots\right\}$
- La función alcanza máximo en 1 para $x \in \{2k\pi \wedge \ k \in \mathbb{Z}\} = \\ = \{\ldots, -2\pi, 0{,}2\pi, 4\pi, \ldots\}$
- La función alcanza mínimo en -1 para $x \in \{\pi + 2k\pi \wedge \ k \in \mathbb{Z}\} = \\ = \{\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots\}$
- Sus conjuntos de positividad y negatividad son:
  - ✓ $C^+ = \cdots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \cup \ldots$
  - ✓ $C^- = \cdots \cup \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right) \cup \ldots$
- Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento son:
  - ✓ $C^{\uparrow} = \cdots \cup (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi) \cup (3\pi; 4\pi) \cup \ldots$
  - ✓ $C^{\downarrow} = \cdots \cup (-2\pi; -\pi) \cup (0; \pi) \cup (2\pi; 3\pi) \cup \ldots$

Su gráfico es:



Período de una función trigonométrica

Desde el momento en que fueron definidas, vimos que tanto la función seno como la función coseno repiten sus valores cada 2π radianes.

Este hecho lo observamos con cierto detalle, por ejemplo, cuando vimos que las abscisas de los máximos de la función seno pueden describirse mediante el conjunto

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Recordemos que esta expresión nos indicaba que el seno tenía un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y en todos los valores que se obtenían sumando o restando 2π una cantidad entera de veces. Es decir, que la función valía lo mismo (en este caso 1) cada 2π.
Esto último no es exclusivo del máximo de la función seno. En general, tanto para $f(x) = sen(x)$ como para $f(x) = \cos(x)$ es cierto que, para todo valor del dominio de la función:

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

Debido a esto último, decimos que las funciones seno y coseno son *funciones periódicas* y su *período es* 2π. Lo anotamos así:

$$T = 2\pi$$

Funciones de la forma $f(x) = a.sen(bx)$ y $f(x) = a.sen(bx)$

Comenzaremos estudiando algunas variaciones a las funciones seno y coseno.

Ver video con ejemplos 1, 2 y 3

En el caso de las funciones de la forma $f(x) = a.sen(x)$ y $f(x) = a.cos\,(x)$ (con $a \neq 0$) el parámetro a modifica a la función seno o coseno de la forma que indicamos a continuación. Sabemos que el seno toma todos los valores entre -1 y 1, es decir:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1$$

Supongamos que $a > 0$, entonces $f(x) = a.sen(x)$ tomará todos sus valores entre:

$$-a \leq a.sen(x) \leq a$$

Si, en cambio, $a < 0$:

$$-a \geq a.sen(x) \geq a$$

En ambos casos, la imagen de la función varía siendo ahora $\mathrm{Im}f = [-|a|; |a|]$
El mismo razonamiento puede hacerse para $f(x) = a.cos(x)$
Decimos que la *amplitud* de la función es:

Amplitud:$|a|$

- Observemos que para las funciones $f(x) = sen(x)$ y $f(x) = cos\,(x)$ estudiadas originalmente, el valor de a es 1, por lo que su amplitud es 1.
- El valor de a produce en la gráfica:
  - un estiramiento vertical si $|a| > 1$
  - una compresión vertical si $0 < |a| < 1$

En el caso de las funciones de la forma $f(x) = sen(bx)$ (con $b \neq 0$) vamos a distinguir también si b es positivo o negativo:

- Si $b > 0$, $b = |b|$ y podemos expresar f de la forma $f(x) = sen(|b|x)$
- Si $b < 0$, $b = -|b|$ y podemos expresar f de la forma $f(x) = sen(-|b|x)$.
  Sabemos además que $sen(-x) = -sen(x)$.
  Por lo tanto, $f(x) = sen(-|b|x) = -sen(|b|x)$.

Como el seno es una función periódica, sabemos que sus valores se repiten cada 2π. Es decir, que f tomará todos sus valores cuando su argumento tome todos los valores entre 0 y 2π:

$$0 \leq |b|x \leq 2\pi$$

Dividiendo por $|b|$:

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{|b|}$$

Entonces, $f(x) = sen(bx)$ tomará todos sus valores cada $\frac{2\pi}{|b|}$, independientemente del valor de b no nulo. Así, el período de la función será:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

Notemos que para el caso de la función y $f(x) = cos\ (bx)$, el razonamiento es muy similar al anterior, con una diferencia al analizar el valor negativo de b:

- Si $b > 0$, $b = |b|$ y podemos expresar f de la forma $f(x) = cos(|b|x)$
- Si $b < 0$, $b = -|b|$ y podemos expresar f de la forma $f(x) = cos(-|b|x)$.
  Sabemos además que $cos(-x) = cos(x)$.
  Por lo tanto, $f(x) = cos(-|b|x) = cos(|b|x)$.

Y, continuando el razonamiento anterior comprobamos que, también en este caso, el período es $\frac{2\pi}{|b|}$.

Por último, te proponemos un ejemplo que integra las dos situaciones anteriores:

Video del ejemplo 4: estudio de $\boldsymbol{f(x) = 5sen(2x)}$

■