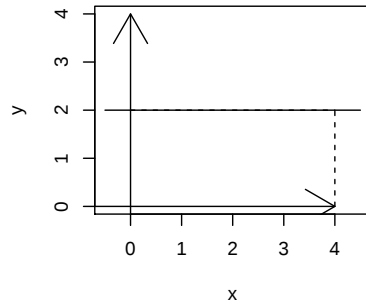
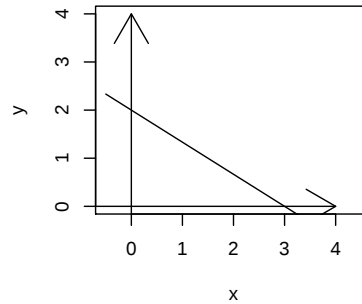
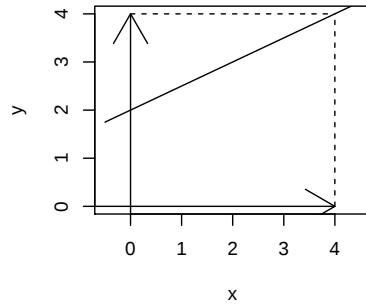


Práctica 9: Integrales

Ejercicio 1 Halle, en cada caso, la función área bajo la curva entre 0 y x . Compruebe que $A'(x) = f(x)$.



Ejercicio 2 Se sabe que las funciones f y g son integrables y que

a) $\int_{-3}^4 (3f(x) - 4g(x)) dx = 23$, $\int_{-3}^4 g(x) dx = 7$. Calcule $\int_{-3}^4 f(x) dx$

b) $\int_1^2 2f(x) dx = 5$, $\int_1^2 g(x) dx = 7$. Calcule $\int_1^2 (f(x) + 2g(x)) dx$

Ejercicio 3 Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $A(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

d) $D(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{y}{2+y^3} dy$

b) $B(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin u}{1+u} du$

e) $E(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$

c) $C(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt$

Ejercicio 4 Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

a) La función f no es continua ¿lo es $F(x) = \int_0^x f(t) dt$?

b) La función g no es derivable ¿lo es $G(x) = \int_0^x g(t) dt$?

Ejercicio 5 Sabiendo que

a) la función continua f satisface $\int_0^x f(t) dt = x^2(1+x)$, calcule $f(2)$.

b) la función continua g satisface $\int_0^{x^2} g(t) dt = x^2(1+x)$, $x > 0$, calcule $g(2)$.

Ejercicio 6 Calcule las siguientes integrales usando la Regla de Barrow y las propiedades de linealidad de la integral.

a) $\int_0^3 3(x-2) dx$

c) $\int_{\pi}^{5\pi} (\sin x - \cos x) dx$

b) $\int_{-2}^2 (x^3 + 2x) dx$

d) $\int_0^{64} (2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

Ejercicio 7 Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, compruebe las siguientes igualdades y calcule, en cada una de ellas, el valor de K .

a) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{3t+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + K$

b) $\int_0^x \frac{\cos t}{2\sin t + 3} dt = \frac{1}{2}\ln|3 + 2\sin x| + K$

Ejercicio 8 Halle en cada caso, una función $f(x)$ que satisfaga

a) $f'(x) = 2$

e) $f'(x) = e^x$

b) $f'(x) = x$

f) $f'(x) = x^5$

c) $f'(x) = \sin(x)$

g) $f'(x) = x + x^3$

d) $f'(x) = \cos(x)$

h) $f'(x) = 3x + \frac{4}{x}$

Ejercicio 9 Encuentre en cada caso, una función $G(x)$ que satisfice

a) $G'(x) = 6x + 1$, $G(1) = 3$

b) $G''(x) = 6x$, $G'(1) = 3$, $G(0) = 1$

c) $G'''(x) = x + \text{sen}(x)$, $G''(0) = G'(0) = G(0) = 5$

Ejercicio 10 Calcule las siguientes integrales

a) $\int 4x^6 dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{x} (3x + \sqrt{x}) dx$

b) $\int \text{sen}(x - 1) dx$

d) $\int \frac{7dx}{\cos^2 x}$

Ejercicio 11 Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales

a) $\int (3x + 1)^2 dx$

k) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

b) $\int \frac{dx}{2x + 5}$

l) $\int a^{5x} dx$

c) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3 + 2}} dx$

m) $\int \text{sen}(\cos(x)) \text{sen}(x) dx$

d) $\int \frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)} dx$

n) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

e) $\int e^{-3x} dx$

o) $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[4]{5 - 2x^2}} dx$

f) $\int_0^1 x e^{2x^2} dx$

p) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$

g) $\int \text{sen}(x) \cos^2(x) dx$

q) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

h) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

r) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

i) $\int_1^e \frac{\cos(x)}{\text{sen}^4(x)} dx$

s) $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$

j) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

t) $\int \sqrt{(3x + 5)^7} dx$

$$u) \int (x-1) \sqrt{x^2-2x} \, dx$$

$$x) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} \, dx$$

$$v) \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$y) \int x^3 e^{x^4+1} \, dx$$

$$w) \int_2^3 \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} \, dx$$

$$z) \int_0^\pi \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x \, dx$$

Ejercicio 12 Marque con una cruz la única respuesta correcta. Dada la función continua f , ponemos $A = \int_2^3 f(x) dx$ y $B = \int_8^{11} f\left(\frac{t-2}{3}\right) dt$, entonces es cierto que

☐ $A = 3B$

☐ $3A = B$

☐ $A = B$

☐ Ninguna de las anteriores

Ejercicio 13 Aplique el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales

$$a) \int x \ln x \, dx$$

$$e) \int \frac{x}{e^x} dx$$

$$b) \int_1^e \ln x dx$$

$$f) \int_0^\pi x^3 \cos x dx$$

$$c) \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$g) \int x^3 e^{2x} dx$$

$$d) \int x e^x dx$$

$$h) \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

Ejercicio 14 Si llamamos $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

Ejercicio 15 La función f tiene derivada continua y cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen}(x) \, dx = 4 \text{ y } f(-\pi) = 3.$$

Calcule $\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x) \cos(x) \, dx$

Ejercicio 16 Calcule las siguientes integrales usando el método de fracciones simples

$$a) \int \frac{4}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$c) \int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} dx$$

$$b) \int \frac{2x + 1}{x^2 - 4} dx$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 La función f satisface $f(x) = 5xf'(x)$. Si $\int_0^2 f(t) dt = 12$, calcule $f(2)$.

Ejercicio 2 Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de

$$f(x) = \int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t) dt.$$

Ejercicio 3 Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que para cada $x \in (0, +\infty)$ se verifica que

$$(2x^2 + 3x)f(x) = e^{-x+1} + \int_1^{2x^2-x} f(t) dt$$

Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 1$.

Ejercicio 4 Encuentre una primitiva F de la función $f(x) = \frac{e^{3x}}{4 + e^{3x}}$ que satisfaga $F(0) = -3 \ln(4)$

Ejercicio 5 Halle una función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable que satisfaga la ecuación integral

$$(x+3)f(x) = x^3 + 1 + \int_1^x f(t) dt, \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6 Halle una función $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada continua que satisfaga la ecuación integral

$$f(x) = 3\sin^2(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^x f'(t) \cos^2(t) dt$$

Ejercicio 7 Halle una función continua g tal que

$$1 + \int_0^{\ln x} g(e^t) dt = x^2 + \ln(x), \quad x > 0.$$

Ejercicio 8 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{3x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $\int_{e^{-3}}^1 f(x) dx$

b) Determine el valor de $k > 0$ para el cual $\int_{e^{-3}}^k f(x) dx = 35$.