

ACTIVIDAD 1

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Ejercicio 1

Decidan si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $2^5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ Falsa ya que $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ Verdadera $4^3 = 64$

c) $5^2 = 5 \cdot 2$ Falsa ya que $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Ejercicio 2

Completen las siguientes tablas de potencias:

a)

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
64	32	16	8	4	2	1

b)

3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
729	243	81	27	9	3	1

Hemos visto en el Conjunto de los Números Naturales que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores } a} \quad a \in N_0, n \in N$$

a Base

n Exponente

a^n se lee Potencia Enésima del número a

Ejemplos: $0^8 = 0$; $2^5 = 32$; $3^4 = 81$; $8^0 = 1$

Veamos que ocurre cuando trabajamos con números enteros:

Ejercicio 3

Teniendo en cuenta que se llama potencia al producto de factores iguales, escriban como potencia los productos y como productos las potencias.

a) $(-8) \cdot (-8) = (-8)^2$

b) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3$

$$c) -5 \cdot 5 \cdot 5 = -5^3$$

$$d) (-7)^2 = (-7) \cdot (-7)$$

$$e) (-1)^3 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$f) -3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3$$

Ejercicio 4

Calculen las siguientes potencias:

$$a) -2^5 = -32$$

$$c) (-1)^1 = -1$$

$$d) (-5)^0 = 1$$

$$e) -3^4 = -81$$

$$f) (-4)^2 = 16$$

Ejercicio 5

a) Redondeen las potencias cuyo resultado es -1 :

$$(-1)^2 \quad (-1)^5 \quad (-1)^{10} \quad (-1)^{15} \quad (-1)^8 \quad (-1)^6 \quad (-1)^{21} \quad (-1)^{101}$$

b) Si a es un número entero y n es un número natural, ¿en qué condiciones a^n es positivo? ¿Y negativo?

a^n es positivo si a es un número entero distinto de cero y n es par.

a^n es positivo si a es un número entero positivo y n es impar.

a^n es negativo si a es un número entero negativo y n es impar.

c) Escriban tres potencias de base negativa y resultado positivo y otras tres potencias de base negativa y resultado negativo.

$$\begin{aligned} (-5)^2 &= 25 & (-2)^4 &= 16 & (-10)^2 &= 100 \\ (-4)^3 &= -64 & (-5)^3 &= -125 & (-2)^5 &= -32 \end{aligned}$$

Si observamos los siguientes ejemplos:

$$a) 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$b) 4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$c) (-3)^4 = -3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$d) (-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Podemos concluir que si el exponente es par, el resultado siempre es positivo y, si el exponente es impar, el resultado respeta el signo de la base.

Ampliamos la definición para el conjunto de los números enteros:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\dots\dots a}_{n \text{ factores } a} \quad a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

a Base

n Exponente

a^n se lee *Potencia Enésima del número a*

Analizamos los siguientes ejemplos:

$$(-3)^4 = 81$$

$$-3^4 = -3.3.3.3. = -81$$

$$-3^0 = -1$$

$$(-3)^0 = 1$$

En el siguiente link podrás ver la explicación: <https://youtu.be/TUNXyggfBOI>

Ejercicio 6

Resuelvan los siguientes cálculos combinados

Recordemos que cuando se resuelve un cálculo combinado primero resolvemos las potencias y raíces, luego las multiplicaciones y divisiones y por último las adiciones y sustracciones. Si figuran paréntesis, éstos se resuelven primero respetando el orden anterior.

$$\text{a) } 3^3 - [(-5)(-1)^3][3 \cdot 8^0]^2 =$$

$$27 - [(-5) \cdot (-1)][3 \cdot 1]^2 =$$

$$27 - 5 \cdot 9 = 27 - 45 = -18$$

$$\text{b) } (-4)^0 + [(-7)(-1)^{12}]^2 - 10^2 : (-2) =$$

$$1 + [(-7) \cdot 1]^2 - 100 : (-2) =$$

$$1 + [(-7)]^2 + 50 =$$

$$1 + 49 + 50 = 100$$

$$\text{c) } 2 \cdot [(-5 - 3) \cdot (-2) - (12^2 - 5^3)] + (-3)(-3)^2 =$$

$$2 \cdot [(-8) \cdot (-2) - (144 - 125)] + (-3) \cdot 9 =$$

$$2 \cdot [16 - 19] + (-27) =$$

$$2 \cdot [-3] + (-27) = -6 - 27 = -33$$

$$d) (-2)(-2)^5 : 2^2 : (-2)^3 + 3(-7)^1 - 6^3 =$$

$$(-2)^6 : 2^2 : (-2)^3 + 3(-7) - 216 =$$

$$(-2)^6 : (-2)^2 : (-2)^3 + (-21) - 216 =$$

$$(-2) + (-21) - 216 = -239$$

A modo de ejemplo el ejercicio 6b) en el siguiente link: <https://youtu.be/JwJmxik6lLo>

Ejercicio 7

Traduzcan y resuelvan:

a) El cuadrado de la diferencia entre -10 y 6 . $(-10 - 6)^2 = (-16)^2 = 256$

b) El cubo de -4 aumentado en el cuadrado de -6 .

$$(-4)^3 + (-6)^2 = -64 + 36 = -28$$

c) El cubo de la suma entre 5 y el opuesto de 8 .

$$[5 + (-8)]^3 = (-3)^3 = -27$$

d) La diferencia entre el cuadrado de 5 y el cubo de -1 .

$$5^2 - (-1)^3 = 25 - (-1) = 25 + 1 = 26$$

e) El cuadrado del producto entre -4 y 5 .

$$(-4 \cdot 5)^2 = (-20)^2 = 400$$

Ejercicio 8

Completen los espacios vacíos para obtener las igualdades pedidas:

a) $\square^2 = 144$ b) $-4^{\square} = -64$ c) $\square^4 = -1$ d) $(-10)^5 = \square$

a) $(-12)^2 = 12^2 = 144$

b) $-4^3 = -64$

c) $-1^4 = -1$

d) $(-10)^5 = -100000$

Ejercicio 9

Escriban las potencias como productos y luego escriban el resultado como única potencia, como en el ejemplo siguiente: $3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3^4} = 3^6$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$

b) $4^7 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8$

c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $2^7 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

e) $(-3)^4 : (-3)^2 = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3)} = (-3) \cdot (-3) = (-3)^2$

f) $a^m : a^n = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$)

g) $[(-6)^2]^4 =$

$[(-6) \cdot (-6)]^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^8$

h) $(5^6)^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{18}$

i) $(2^2)^0 = 2^{2 \cdot 0} = 2^0$

j) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Observando los resultados del ejercicio anterior podemos enunciar tres propiedades:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Producto de potencias de igual base se suman los exponentes

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (\text{con } a \neq 0)$$

Cociente de potencias de igual base se restan los exponentes

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Potencia de otra potencia se multiplican los exponentes

Ejercicio 10

Resuelvan aplicando las propiedades de la potenciación

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2 = 2^{3+5+2} = 2^{10}$

b) $3^4 \cdot 3^6 \cdot 3 = 3^{4+6+1} = 3^{11}$

c) $5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

d) $(-9)^4 : (-9)^2 = (-9)^{4-2} = (-9)^2$

e) $(-3)^8 : (-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^{8-3+2} = (-3)^7$

f) $[(-4)^3]^4 = (-4)^{3 \cdot 4} = (-4)^{12}$

g) $[(-5)^2]^4 \cdot (-5) : (-5)^3 =$

$(-5)^{2 \cdot 4} \cdot (-5) : (-5)^3 = (-5)^8 \cdot (-5) : (-5)^3 = (-5)^{8+1-3} = (-5)^6$

- h) $[(-6)^2]^3 : (-6)^4 \cdot (-6)^0 =$
 $(-6)^{2 \cdot 3} : (-6)^4 \cdot (-6)^0 = (-6)^6 : (-6)^4 \cdot (-6)^0 = (-6)^{6-4+0} = (-6)^2$
- i) $p^6 \cdot p^3 \cdot p^2 = p^{6+3+2} = p^{11}$
- j) $m^{11} \cdot p^2 \cdot m^5 \cdot p^3 = m^{11+5} \cdot p^{2+3} = m^{16} \cdot p^5$
- k) $w^{10} : w^2 \cdot w^3 = w^{10-2+3} = w^{11}$ (con $w \neq 0$)
- l) $\frac{n^{10} \cdot s^8}{n^2 \cdot s^6} = n^{10-2} \cdot s^{8-6} = n^8 \cdot s^2$ (con $n \neq 0$ y $s \neq 0$)

A modo de ejemplo ejercicio 10 g) y l) en el siguiente link:

<https://youtu.be/odHGow5ryfg>

Ejercicio 11

Completen con = o $\neq$ según corresponda

- a) $5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2$
- b) $(9 : 3)^3 = 9^3 : 3^3$
- c) $(-4)^2 \cdot (-6)^2 = [(-4) \cdot (-6)]^2$
- d) $100 : 25 = (10 : 5)^2$
- e) $(6 + 1)^3 \neq 6^3 + 1^3$
- f) $7^2 - 2^2 \neq (7 - 2)^2$

¿La potenciación es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción? ¿Y respecto de la multiplicación y la división?

Podemos concluir enunciando la siguiente propiedad:

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y división:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n \quad (\text{con } b \neq 0)$$

NOTA: La potenciación NO es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

$$(a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Contraejemplos:

$$(6 + 1)^3 \neq 6^3 + 1^3$$

$$7^2 - 2^2 \neq (7 - 2)^2$$

Como la potenciación no es distributiva con la suma y tampoco con la resta:

$$(x \pm a)^2 \neq x^2 \pm a^2$$

Si tenemos que desarrollar esa potencia, procedemos como en los siguientes ejemplos:

a) $(x + 2)^2 = (x + 2) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

$$b) (x-2)^2 = (x-2) \cdot (x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

En el siguiente link podrás ver la explicación con otro ejemplo:

<https://youtu.be/NE1MVqV6gCc>

Ejercicio 12

Desarrollen los siguientes cuadrados:

$$a) (z + 10)^2 =$$

$$(z + 10) \cdot (z + 10) = z \cdot z + z \cdot 10 + 10 \cdot z + 10 \cdot 10 = z^2 + 2 \cdot 10 \cdot z + 10^2 = z^2 + 20z + 100$$

$$b) (a - 6)^2 =$$

$$(a - 6) \cdot (a - 6) = a \cdot a - a \cdot 6 - 6 \cdot a + 6 \cdot 6 = a^2 - 2 \cdot 6 \cdot a + 6^2 = a^2 - 12a + 36$$

$$c) (3 - x)^2 =$$

$$(3 - x) \cdot (3 - x) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot x - x \cdot 3 + x \cdot x = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 9 - 6x + x^2$$

$$d) (4 + a^2)^2 =$$

$$(4 + a^2) \cdot (4 + a^2) = 4 \cdot 4 + 4 \cdot a^2 + a^2 \cdot 4 + a^2 \cdot a^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot a^2 + (a^2)^2 = 16 + 8 \cdot a^2 + a^4$$