Para comenzar con el nuevo tema, propongo ver el gif:

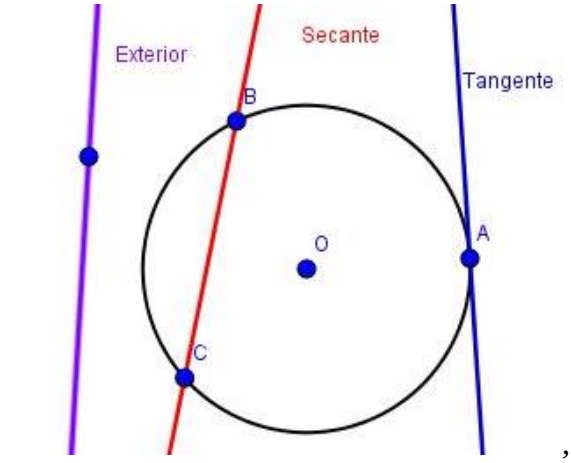
https://1.bp.blogspot.com/-M86T7C74wXo/VRJ12rCeFcI/AAAAAAAAEg4/apymi1hn7_E/s1600/derivada.gif

Se ve el gráfico de una función, y un punto que se va desplazando por el gráfico. Y ese punto que se desplaza pertenece a una recta que "está apoyada" sobre el gráfico sólo en ese punto, y en ninguno más de un entorno cercano al gráfico.

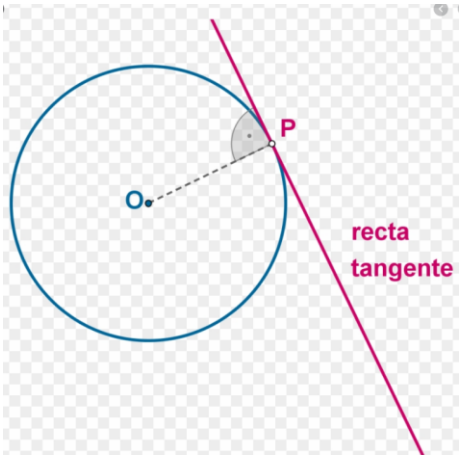
Esa recta, es lo que se llama **recta tangente** al gráfico en el punto "en que se apoya" sobre el gráfico.

Es posible que ustedes hayan trabajado con rectas tangentes a circunferencias, y no a otras curvas.

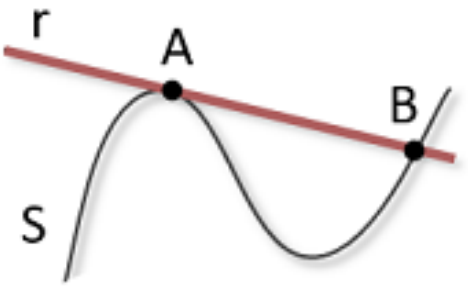
Un recta tangente a una circunferencia interseca a la circunferencia en un solo punto. Si una recta interseca a la circunferencia en dos puntos se llama secante y si no la interseca se llama exterior a la circunferencia.



,



En una curva que no sea una circunferencia, la recta tangente, localemte también interseca en un solo punto a la curva, "se apoya suavemente" solo sobre el punto de tangencia, pero luego puede volver a intersecar a la curva



la recta ***r*** es tangente a curva **S** en el punto **A** pero luego interseca a la curva en el punto **B**, donde claramente no es la recta tangente.

Para que una recta sea tangente en un punto, localmente se debe comportar como se comporta una recta con una circunferencia, que es perpendicular al radio de la circunferencia y es una "rectificación" del arco de circunferencia que contiene al punto. La recta tangente se apoya suavemente sobre la curva, no la atraviesa, y en un entorno pequeñoa al punto de tangencia tiene "el mismo" comportamiento.

Lo que queremos ver es cómo dado el gráico de una función cualquiera, **lograr construir la recta tangente a un punto** cualquiera del gráfico de esa función.

¿Cuál es el interés de calcular la recta tangente en un punto a una curva?

Si volvemos a ver el gif, veremos que cuando la función crece, la recta tangente – que localmente se comporta de la misma manera que la función - y que está dibujada con el color verde, tambien crece. En cambio, cuando la función decrece, la recta tangente, señalada con color rojo también decrece, y si tiene extremos, así sean máximos o mínimos, la recta tangente es horizontal.

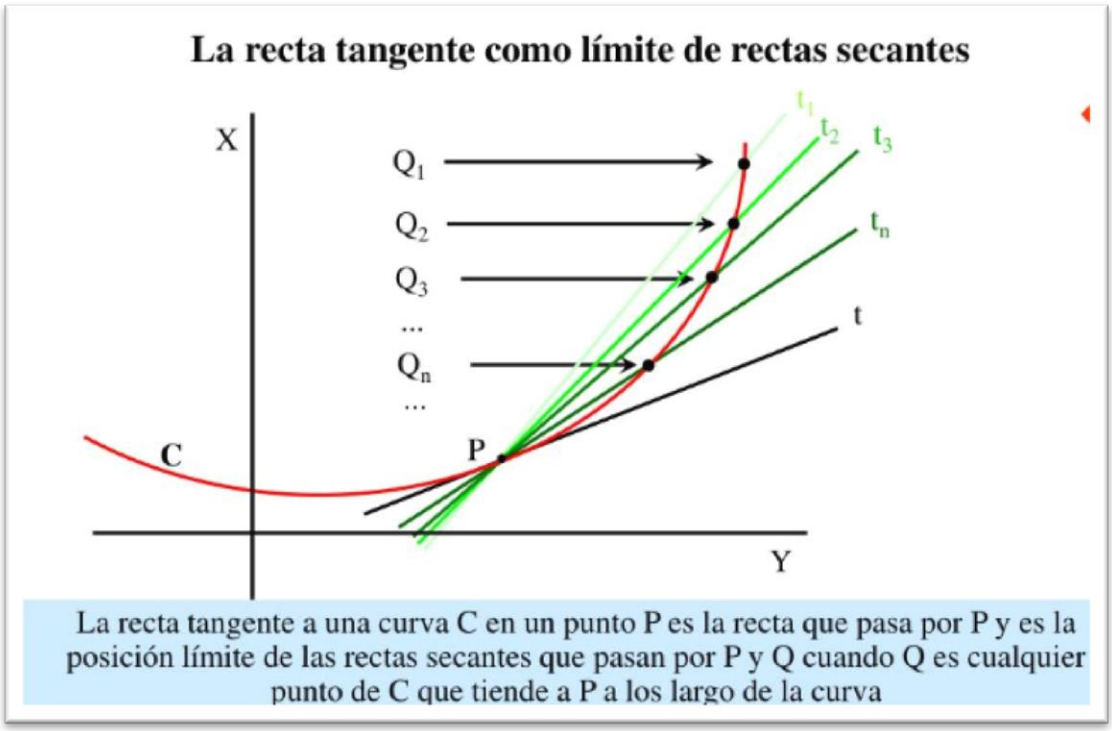
https://1.bp.blogspot.com/-M86T7C74wXo/VRJ12rCeFcI/AAAAAAAAAEg4/apymi1hn7_E/s1600/derivada.gif

Y como para para qué una recta sea creciente o sea decreciente o sea horizontal, eso depende de la pendiente, debemos ocuparnos de calcular la pendiente de la recta tangente; y luego en los puntos donde la pendiente de la recta tangente sea positiva, la función va a crecer, donde la pendiente sea negativa la función va a decrecer, y donde tenga pendiente nula puede tener un extremo, ya sea máximo o mínimo.

Teniendo la pendiente y el punto de tangencia, también podremos calcular la ecuación de la recta tangente.

Para calcular la recta tangente y su pendiente la idea es, construir una sucesión de rectas secantes al grafico de *f*, que se acerquen a la recta tangente.

Las recetas secantes sabremos calcularlas, pues conoceremos dos puntos de ellas, y llegaremos a la recta tangente, aproximándonos mediantes las rectas secantes:



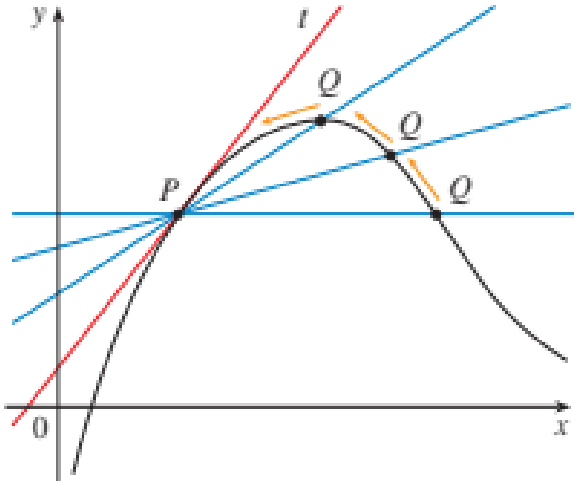
El poder obtener la recta tangente en cualquier punto de la curva, luego nos posibilitará, como ya dijimos, calcular los intervalos de crecimiento y los extremos de una función, además de otras cosas más, que ya veremos.

Pero antes, **construyamos una manera para calcular la pendiente de la recta tangente a un punto cualquiera del gráfico de una función**.

Para eso, dado una curva que corresponda al gráfico de una función, quiero conocer la pendiente de la recta tangente en un punto al que llamo P. Para eso tomo otro punto sobre la curva al que llamo Q y **trazo la recta secante a la curva por esos dos puntos, de la que puedo calcular su pendiente**. Esa pendiente no es la pendiente de la recta tangente, pero nos da una primera idea de cuánto puede valer, aproximadamente, la pendiente de la recta tangente buscada.

Luego tomaré otro punto Q, más próximo a P, con lo cual la recta tangente será "más parecida" a esta nueva recta, es decir, la pendiente de la nueva recta secante, está más próxima al valor de la pendiente de la tangente.

Y luego repito el procedimiento, es decir vuelvo a tomar un punto Q más cercanos a P, y vuelvo a calcular su pendiente:



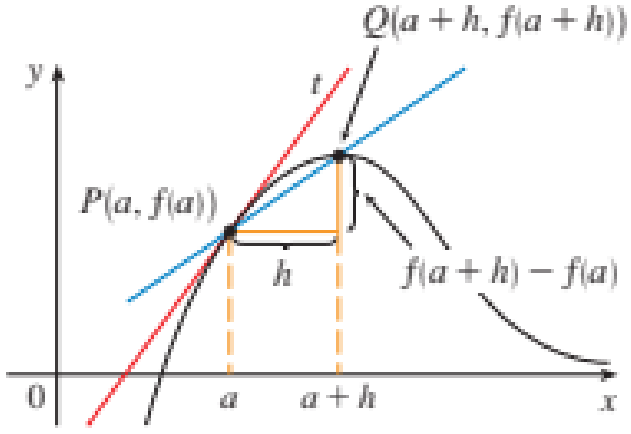
Construyo así una sucesión de pendientes de rectas secantes que se van a acercar a la pendiente de la recta tangente.

Cálculo de la pendiente de la recta tangente en $P=(x_0, f(x_0))$

Veamos el proceso y las cuentas para poder llegar al valor de la pendiente de la recta tangente.

El punto ***P***, tiene como primera coordenada a **x = *a***, y la segunda, es ***f(a)***.

El punto ***Q*** tiene como primera coordenada a **x = *a+h***, es decir que nos movimos una distancia h del punto *a*, la primera coordenada de P, para llegar a la primera coordenada de ***Q: a+h***, y la segunda de ***Q*** , es ***f(a+h)***.



Consideramos un punto $Q=(x_0+h, f(x_0+h))$ con $h\neq 0$. La pendiente de la recta por P y Q es igual a $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

La pendiente de la recta secante que pasa por ***P*** y ***Q*** es:

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Lo que tenemos que ver es a que valores se está acercando m_{PQ} a medida que el valor de *h* se acerca a cero tan próximo como sea posible, es decir una distancia infinitamente pequeña.

Ese proceso de acercar la variable h a cero tanto como uno quiera lo vamos a identificar diciendo que: h tiende a cero, y se escribe: $h \to 0$

Y el valor al que se está acercando $m_{PQ} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando h tiene a cero, lo vamos a llamar, el límte de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando h tiende a cero, y lo notamos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Retomando entonces el proceso para calcular de la pendiente de la recta tangente:

Tenemos el valor de la pendiente de la recta secante:

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Para que el punto Q se acerque a P, lo que debe ocurrir es que la abscisa $(x_0 + h)$ de Q tienda a la abscisa x_0 de P, lo que equivale a que h tienda a 0. Así, si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$, diremos que *m es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto* $P = (x_0, f(x_0))$.

Es decir la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes, cuando el incremente h tiende cero:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo del cálculo de la pendiente la recta tangente

Hallar, si existe, la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)=x^2$ en el punto $P=(2,f(2))=(2,4)$.

Calculamos

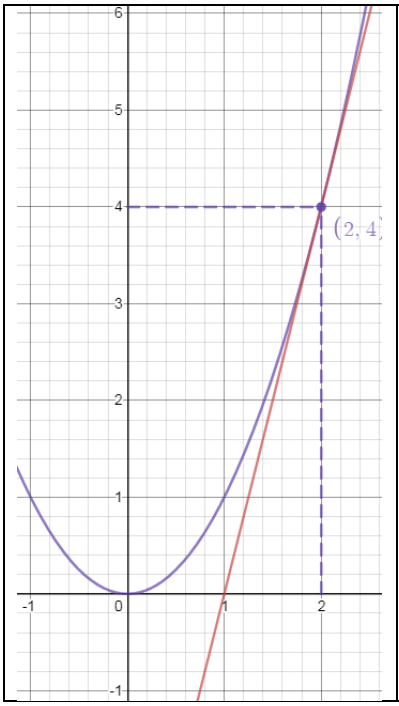
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=$$

Simplificando nos queda: $\lim_{h\to 0}(4+h)$ que claramente a medida que *h* esté más cerca de 0 el valor va a estar más próximo a 4, es decir: (4+*h*) tiende a 4 cuando h tiende a 0.

$$\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

Es decir que la pendiente de la recta tangente en $x=2$ es igual a 4.

Como la recta pasa por el punto $(2,f(2))=(2,4)$, la ecuación de la tangente es $y=4(x-2)+4$.



Trazando el gráfico de ***f,*** y la recta tangente en el (2,4)

Claramente se ve que la pendiente es positiva, y que la ordenada al origen es negativa.

El cálculo del límite del cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

nos dio que m = 4

Y teniendo el punto de tangencia, calculamos que la ordenada al origen es -4.

La recta es ***y = 4x – 4***.

Notese, que en un entorno del punto de tangencia, casi no hay diferencia entre la parábola y la recta tangente.

Observación importante: En el ejemplo que acabamos de desarrollar, para poder calcular el límite de $\frac{(2+h)^2-4}{h}$ tuvimos que reescribir esa expresión para saber a qué valor se acercaba. Si hubiésemos querido verlo directamente el numerador: $(2+h)^2-4$

tiende a cero cuando *h* tiende a cero y el denominador *h* también, con lo cual tendríamos un cociente entre dos cosas que tienden simultáneamente a cero, y eso no sabemos a qué se acerca (es lo que se llama una indeterminación). Por eso tuvimos que hacer esas cuentas, simplificando la expresión y ahí vimos a qué se acercaba.

Definición. Cociente incremental

Dada una función f definida en un intervalo (a,b) y $x_0 \in (a,b)$, al cociente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se lo denomina *cociente incremental.* Hemos visto que, gráficamente es la pendiente de la recta secante por los puntos $P=(x_0,f(x_0))$ y $Q=(x_0+h,f(x_0+h))$ con $h\neq 0$.

Definición. Derivada en un punto

Sea f definida en un intervalo (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Diremos que f es *derivable en* x_0 si existe y es finito el $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Cuando esto ocurre, el valor de dicho límite se denota $f'(x_0)$ (se lee: f prima en x_0) y se denomina *derivada de f en* x_0.

En el ejemplo anterior, vimos que $f(x)=x^2$ es derivable en x=2, y vale que $f'(2)=4$.

Ejercicio:

Sea $f(x)=\sqrt{x+5}$. Hallar el valor de la derivada en $x_0=4$ y dar la ecuación de la recta tangente en el punto $(4,f(4))$.

Calculamos el límite del cociente incremental cuando $h\to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h+5}-\sqrt{9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3}=$$

Es una indeterminación del tipo 0/0

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(9+h)-3^2}{h(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+h}+3}=\frac{1}{6}.$$

Hemos obtenido que f es derivable en x=4 y su derivada es $f'(4)=\frac{1}{6}$.

Ejercicios propuestos:

1) Calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de las funciones en los puntos indicados:

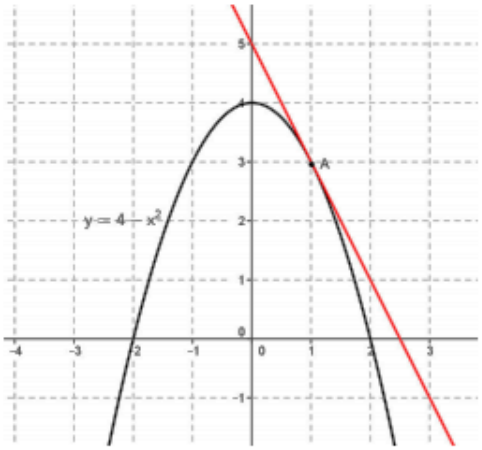
i) $f(x) = 3x + 1$ en x = 1

ii) $f(x) = x^2 - 4$ en x = -1

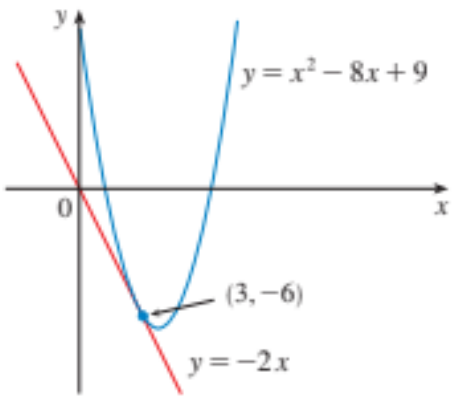
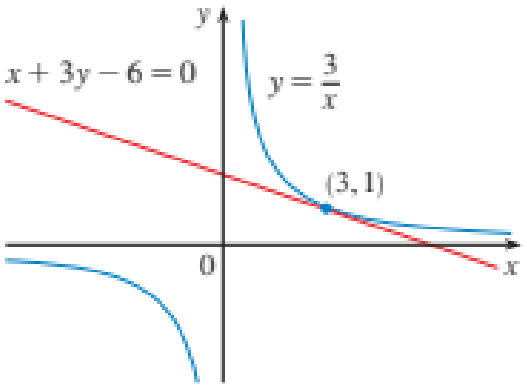
iii) $f(x) = x^2 + x$ en x = 0

iv) $f(x) = \sqrt{x}$ en x = 9

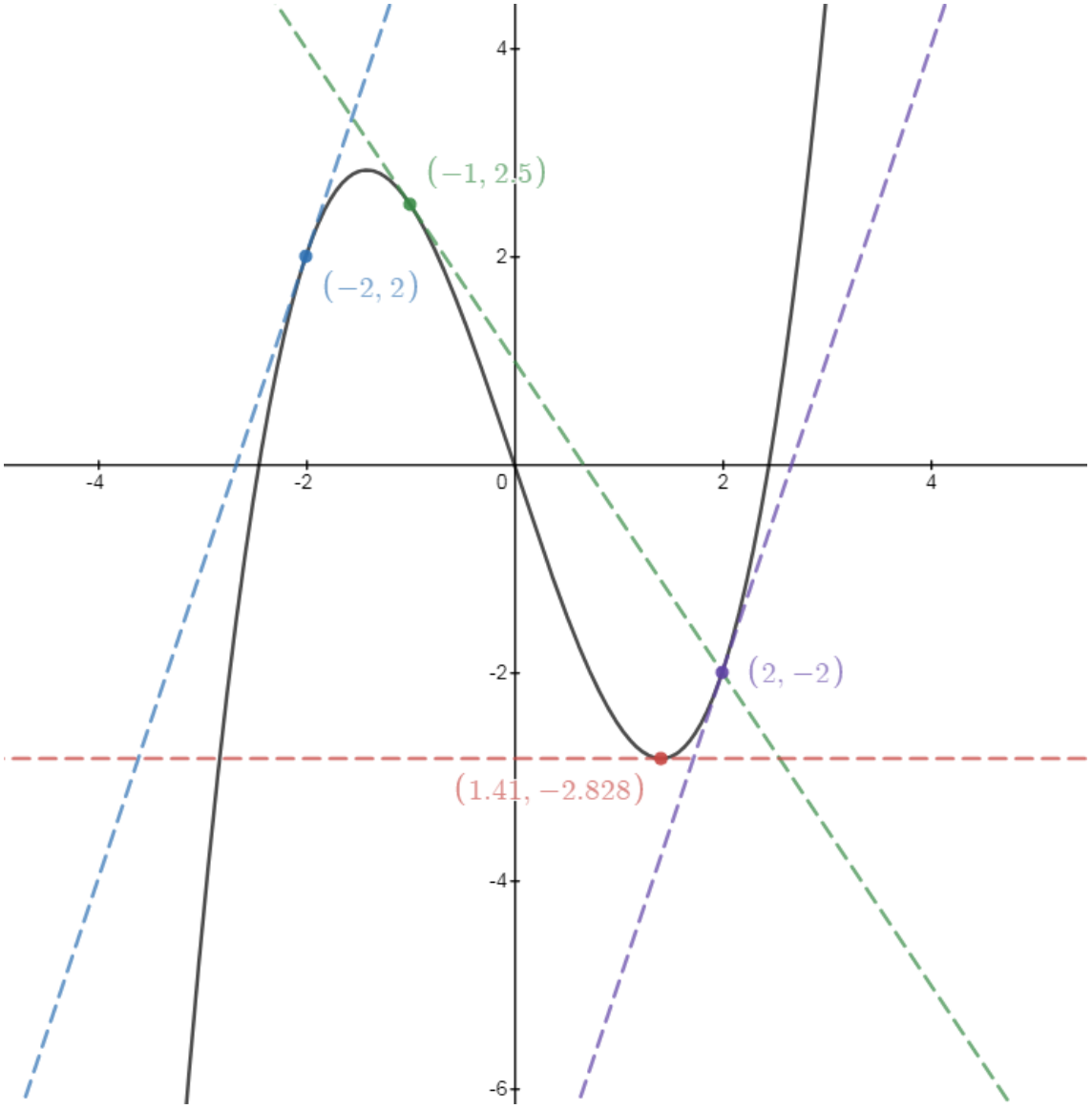
2) Calcular la ecuación de la recta roja (es tangente a la parábola en el punto A)



3) Utilizando el gráfico de la función, Indicar el valor de la derivada de f en cada punto indicado.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en x = 3	b) $f(x) = \frac{3}{x}$ en x = 3
	

4) En la siguiente figura,está representada la función ***f*** (x) y las rectas tangentes en cuatro puntos de su gráfica.



i) Indicar en qué punto de los cuatro representados, el valor de la derivada es menor

ii) Indicar, en qué puntos de los representados la derivada es nula

iii) Sabiendo que la función cumple con la propiedad de que: $f(-a) = -f(a)$ para todo a en el dominio de f , indicar los dos puntos donde la derivada es nula

iv) Indicar todos los puntos del dominio donde la derivada es positiva

v) Indicar todos los puntos del dominio donde la derivada es negativa

vi) Indicar los interevalos de crecimiento y de decrecimiento de la ***f***