

ACTIVIDAD 2

RADICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Hemos visto en el Conjunto de los Números Naturales que:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a \quad a, b \in N_0, n \in N \quad n \geq 2$$

a Radicando

n Índice

$\sqrt[n]{a}$ se lee Raíz Enésima del número a

Por ejemplo: $\sqrt[8]{0} = 0$ $\sqrt[5]{32} = 2$ $\sqrt[4]{81} = 3$

Podemos extender esa definición al conjunto de los Números Enteros

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a \quad a, b \in Z, n \in N \quad n \geq 2$$

a Radicando

n Índice

$\sqrt[n]{a}$ se lee Raíz Enésima del número a

Si n es par $\sqrt[n]{a} = b$ siendo b un número entero no negativo.

Ejemplos:

a) $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

b) $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$

c) $\sqrt[4]{0} = 0$ porque $0^4 = 0$

d) $\sqrt[6]{1} = 1$ porque $1^6 = 1$

Si n es impar $\sqrt[n]{a} = b$ siendo b un número entero.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$ porque $(-3)^3 = -27$

c) $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

Ejercicio 1:**Calcular**

a) $\sqrt{400} = 20$

b) $\sqrt[3]{-1} = -1$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[5]{-100000} = -10$

e) $\sqrt[3]{125} = 5$

f) $\sqrt{81} = 9$

Veamos ahora el siguiente ejemplo: $\sqrt[4]{-16}$ ¿existe algún número entero que elevado a la cuarta potencia de por resultado -16 ? La respuesta es no, ya que todo número entero elevado a un exponente par da por resultado un número positivo.

Por lo tanto si n es par, el radicando que indicamos con “a” tiene que ser positivo.

Entonces podemos concluir que:

- ***Si el índice n es par , $a > 0$:***

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a \text{ y } b > 0$$

- ***Si el índice n es impar:***

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

Ejercicio 2:

Verificar si se cumplen las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$

Se cumple, ya que se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación.

b) $\sqrt{64 : 16} = \sqrt{64} : \sqrt{16}$

Se cumple, ya que se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la división.

c) $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{36} + \sqrt{64}$

$\sqrt{100} = 6 + 8$

$10 \neq 14$

No se cumple ya que la radicación no es distributiva con respecto a la adición.

$$d) \sqrt{144:4} = \sqrt{144}:\sqrt{4}$$

Se cumple, ya que se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la división.

$$e) \sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

$$\sqrt{9} = 5 - 4$$

$$3 \neq 1$$

No se cumple ya que la radicación no es distributiva con respecto a la sustracción.

$$f) \sqrt[3]{-125 \cdot 1000} = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{1000}$$

Se cumple, ya que se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación.

$$g) \sqrt[5]{-32 \cdot 100000} = \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{100000}$$

Se cumple, ya que se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación

Propiedad distributiva:

La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y la división siempre que existan las raíces de las expresiones que intervienen.

En símbolos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$$

Siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ sean números enteros

Ejemplos

$$a) \left. \begin{array}{l} \sqrt{100:25} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{100}:\sqrt{25} = 10:5 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{100:25} \dots\dots\dots \sqrt{100}:\sqrt{25}$$

$$b) \sqrt{(-64):(-4)} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \sqrt{(-64):(-4)} \dots\dots\dots \sqrt{-64} \sqrt{-4}$$

ya que : $\underbrace{\sqrt{-64}}_{\text{No Existe}}, \underbrace{\sqrt{-4}}_{\text{No Existe}}$

En el primer caso podemos aplicar la propiedad distributiva y en el segundo caso no, ya que no podemos calcular las raíces de índice par y radicando negativo.

La radicación no es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción.

Simbólicamente:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a+b} &\neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{a-b} &\neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\end{aligned}$$

Consideremos estos ejemplos:

$$\left. \begin{aligned}\sqrt{36+64} &= \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{36} + \sqrt{64} &= 6 + 8 = 14\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{36+64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

$$\left. \begin{aligned}\sqrt{100-64} &= \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{100} - \sqrt{64} &= 10 - 8 = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{100-64} \neq \sqrt{100} - \sqrt{64}$$

Ejercicio 3:

Calcular las siguientes raíces.

- a) $\sqrt{-3 \cdot (-8) + (-5)^2} = \sqrt{24 + 25} = \sqrt{49} = 7$
- b) $\sqrt{-3^2 + 10^2 - 10} = \sqrt{-9 + 100 - 10} = \sqrt{81} = 9$
- c) $\sqrt[3]{7 \cdot (-4) - 6^2} = \sqrt[3]{-28 - 36} = \sqrt[3]{-64} = -4$
- d) $\sqrt[3]{-10 \cdot (2 - 10) - 9 \cdot (-5)} = \sqrt[3]{80 + 45} = \sqrt[3]{125} = 5$
- e) $\sqrt{(3 - 10)^2 - 2^3(-15)} = \sqrt{49 + 120} = \sqrt{169} = 13$

Ejercicio 4 :

Resolver los siguientes cálculos combinados.

- a) $(-3.4 + 9)^3 + \sqrt{10^2 - 8^2} - 6^0 = (-3)^3 + \sqrt{100 - 64} - 1 = -27 + 6 - 1 = -22$
- b) $\sqrt[3]{18: (-3) - 2} + (-5^2 + 7^0): 4 = \sqrt[3]{-6 - 2} + (-25 + 1): 4 = -2 - 6 = -8$
- c) $3^7: 3^5 - (32: 2^4 - 10) \cdot 2 + \sqrt{289} = 3^2 - (2 - 10) \cdot 2 + 17 = 9 + 16 + 17 = 42$
- d) $(-4^2: 2 - 1)^3: 3^2 + \sqrt{162: 2} + (-5)^2 =$
 $(-16: 2 - 1)^3: 9 + \sqrt{81} + 25 =$
 $-729: 9 + 9 + 25 = -81 + 9 + 25 = -47$
- e) $\sqrt{-6 \cdot 2 \cdot (-27)} + (-7)^5: (-7)^3 - 11^2 =$
 $\sqrt{324} + (-7)^2 - 121 = 18 + 49 - 121 = -54$

Propiedad cancelativa:

- **Índice y exponente impar**

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Entonces: $\sqrt[n]{x^n} = x$ Si n es Impar

Completar:

$$\sqrt[5]{x^5} = x$$

$$\sqrt[15]{(4^3)^5} = 4$$

$$\sqrt[11]{x^{11}} = x$$

$$\sqrt[11]{-2^{11}} = -2$$

- **Índice y exponente par**

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = -(-4)$$

Entonces: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ Si n es Par

Completar:

$$\sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{(-6)^2} = 6$$

$$\sqrt[4]{7^4} = 7$$

Video a la explicación de la propiedad cancelativa:

<https://youtu.be/QfraTLU2F5Q>

Queremos ahora resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 = 4$ ¿qué número elevado al cuadrado es igual a 4?

Esta pregunta tiene dos respuestas: 2 y -2

Al resolver la ecuación tenemos:

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4} \text{ Aplicando la propiedad cancelativa}$$

$$|x| = 2$$

Recordemos la definición de módulo: “el módulo de un número entero es su distancia al cero”. Veamos cómo se resuelven las ecuaciones en las que la incógnita está afectada por un módulo.

Para resolver $|x| = 2$ nos conviene traducir el enunciado al lenguaje coloquial. “La distancia de x al cero es 2”, es fácil ver que los números que cumplen con esa condición son $x = 2$ o $x = -2$.

$$S = \{2, -2\}$$

b) $x^3 = 64$ ¿qué número elevado al cubo es igual a 64?

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{64} \quad \text{Aplicando la propiedad cancelativa}$$

$$x = 4$$

En este caso la solución de la ecuación es $S = \{4\}$

$$\text{c) } (x - 1)^2 = 9$$

$$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{9} \quad \text{Aplicando la propiedad cancelativa}$$

$$|x - 1| = 3$$

Para resolver $|x - 1| = 3$ traducimos al lenguaje coloquial: “la distancia de $x - 1$ al cero es 3”

Por lo tanto podemos ver que $x - 1 = 3$ o $x - 1 = -3$

Resolviendo estas dos ecuaciones tendremos:

$$x - 1 = 3 \quad \text{o} \quad x - 1 = -3$$

$$x = 3 + 1 \quad \text{o} \quad x = -3 + 1$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -2$$

$$S = \{-2; 4\}$$

Podemos observar que esta ecuación tiene dos soluciones.

Video con la resolución de una ecuación con módulo:

<https://youtu.be/qIPgtO1qQYQ>

Ejercicio 5:

Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las soluciones obtenidas.

a) $x^3 = -1000$

g) $2.(x+7)^2 = 242$

b) $(2x-1)^3 = -125$

h) $x^3 : 4 = 54$

c) $(3x)^2 : 8 + 2 = 20$

i) $\sqrt[3]{5x+7} = 3$

d) $\sqrt{x} - 1 = 10$

j) $\sqrt[3]{7x-1} + 4 = 0$

e) $\sqrt[3]{x} : 2 = 4$

k) $3.(x+2)^2 = 432$

f) $(x+3)^5 = 32$

l) $x^2 + 1 = 10$

a) $x^3 = -1000$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-1000}$$

$$x = -10$$

b) $x = -2$

c) $(3x)^2 : 8 + 2 = 20$

$$(3x)^2 : 8 = 20 - 2$$

$$(3x)^2 = 18.8$$

$$(3x)^2 = 144$$

$$|3x| = \sqrt{144}$$

$$|3x| = 12$$

$$3x = 12 \quad o \quad 3x = -12$$

$$x = 12 : 3 \quad o \quad x = -12 : 3$$

$$x = 4 \quad o \quad x = -4$$

d) $x = 121$

e) $x = 512$

f) $x = -1$

g) $x = 4 \quad o \quad x = -18$

h) $x = 6$

i) $x = 4$

j) $x = -9$

k) $x = 10 \quad o \quad x = -14$

l) $x = 3 \quad o \quad x = -3$

Video de la resolución del ejercicio 5b:

<https://youtu.be/n0LVde6uak8>

Video de la resolución del ejercicio 5k:

https://youtu.be/A_q9jvN_bLc

Ejercicio 6:

Traducir las siguientes situaciones y resolver:

La raíz cuadrada de un número disminuida en tres unidades es igual a la diferencia entre -5 y -9. ¿Cuál es el número?

$$\sqrt{x} - 3 = -5 - (-9)$$

$$x = 49$$

El cuadrado de un entero es igual a la suma de: el cuadrado de seis y el cuadrado de ocho. ¿Qué números cumplen dicha condición?

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x = 10 \text{ o } x = -10$$

¿Existe algún número entero que al multiplicarlo por su consecutivo y restarle su cuadrado se obtenga el mismo número?

$$x \cdot (x + 1) - x^2 = x$$

$$x^2 + x + x^2 = x$$

$$x = x$$

Cualquier número entero verifica la igualdad.