En la actividad anterior, desarrollamos el ejercicio:

**Ejemplo del cálculo de la pendiente la recta tangente**

Hallar, si existe, la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)=x^2$ en el punto $P=(2,f(2))=(2,4)$.

Y para eso calculamos la derivada en x = 2

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}4+h=4$$

Luego completamos el ejercicio calculando la ecuación de la recta.

Si en vez de haber calculado la pendiente en el punto de abscisa x=2, es decir, f '(2)

Lo hiciésemos en x =5, los pasos posibles para ese cálculo serían:

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-25}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{25+10h+h^2-25}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(10+h)}{h}=\lim_{h\to 0}10+h=10$$

**Se ve claramente que la estructura operatoria es la misma en x=2 y en x=5,** y si tomásemos otro punto veríamos que es lo mismo, **y eso se debe a que los pasos seguidos para el cálculo no depende del punto, sino de la función.**

Con lo cual, dado que no depende del valor del punto, **podemos poner un *x* genérico y ver que nos queda al aplicar la definición de derivada:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

Lo que obtenemos es una expresión que depende de x es decir una función, y es lo que se llama la **<u>función derivada de *f*</u>**

2

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La función $f'$ se conoce como derivada de $f$, porque se ha "derivado" de $f$ por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de $f'$ es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de $f$.

Es decir que **para cada función de variable real, calculando el límite del cociente incremental para un x genérico, podemos obtener otra función que se llama función derivada**.

En el caso particular que desarrollamos, vimos que :

Si $f(x) = x^2$, entonces si función derivada es $f'(x) = 2x$

**EJEMPLO**

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

**SOLUCIÓN**

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es $h$ y que $x$ se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

**EJEMPLO** Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de $f$. Establezca el dominio de $f'$.

**SOLUCIÓN**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de $f'$ es $(0, \infty)$. Éste es menor que el dominio de $f$, el cual es $[0, \infty)$.

**Ejercicio 1:**

Calcular la función derivada de:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

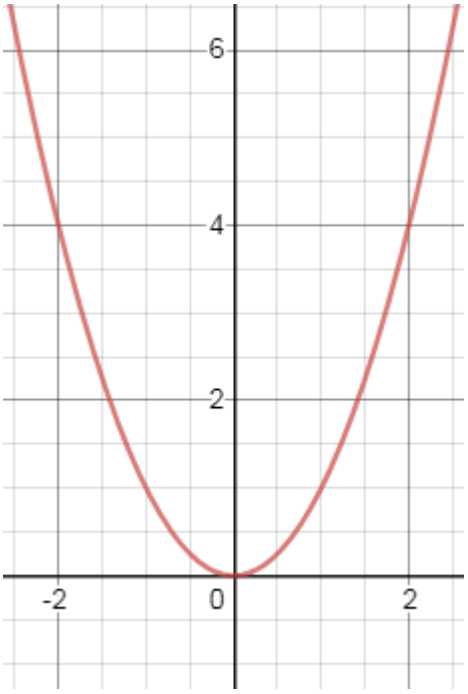
c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

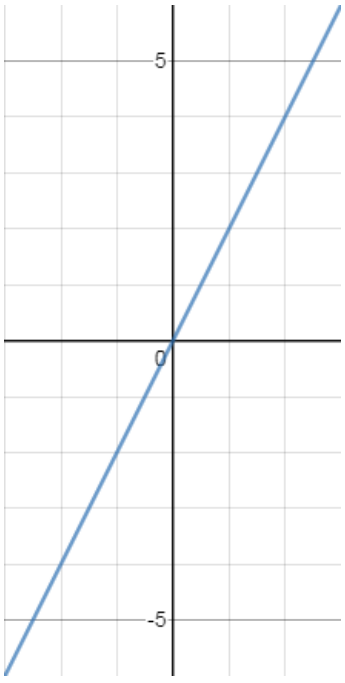
**Ejercicio 2:**

Volvamos al ejemplo con que empezamos:

Si $f(x) = x^2$, entonces si función derivada es $f'(x) = 2x$

Si miramos los gráficos de $f$ (x) y de $f\,'$(x)




a) Qué relación existe entre el Intervalo de crecimiento de $f$ (x) y el conjunto de positividad de $f\,'(x)$

b) Qué relación existe entre el Intervalo de decrecimiento de $f$ (x) y el conjunto de negatividad de $f\,'(x)$

c) Cuál es el valor de la derivada en el punto dónde $f$ alcanza el extremo

**Ejercicio 3**:

Dados los gráficos de $f(x)$ y de $f'(x)$. Indicar:

Los intervalos de crecimiento de $f(x)$

En qué puntos del dominio $f(x)$ alcanza sus máximos o mínimos locales

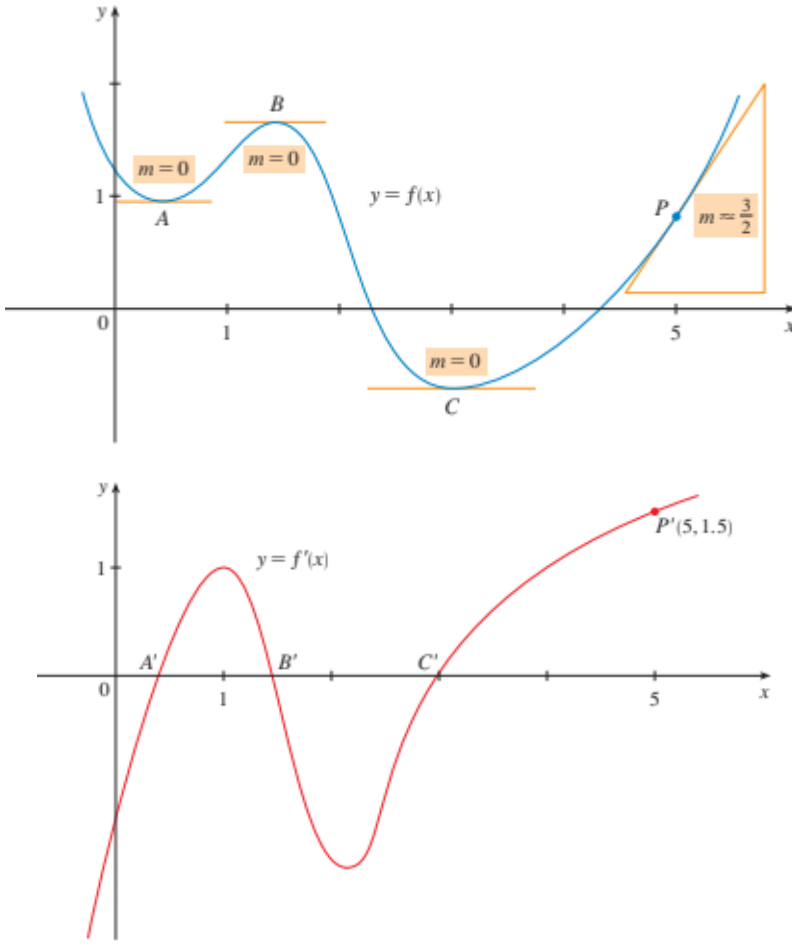
Los intervalos de positividad de $f'(x)$

Los ceros de $f'(x)$

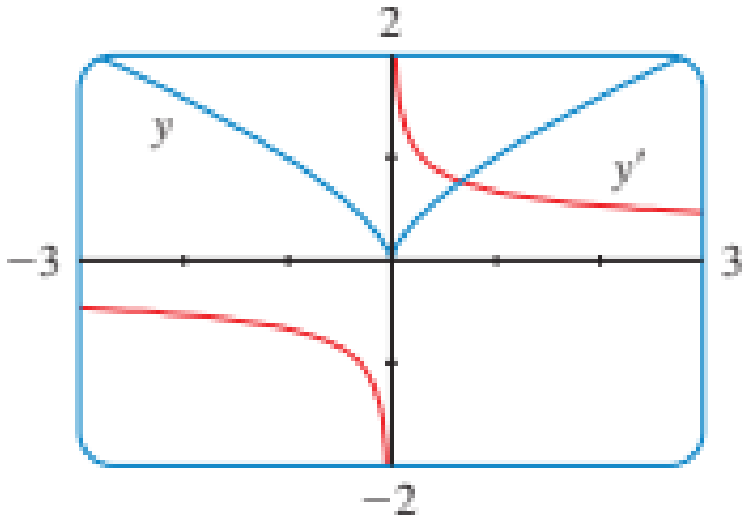
El punto del dominio de $f(x)$ en donde la recta tangente al gráfico tiene pendiente m=3/2 (sólo para el ítem a)

El punto del dominio de $f'(x)$ es igual a 3/2. (sólo para el ítem a)

a)




b)




**Ejercicio 4**:

Sea *f* una función cuya derivada es $f'(x) = x^2 + x - 2$

a) Hallar el conjunto de ceros, de positividad y negatividad de *f '*(x)

b) Indicar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento de f

c) Indicar si *f* tiene extremos especificando de qué tipo de extremo se trata

**Ejercicio 5**:

Sea $f$ una función cuya derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$

a) Indicar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento de f

b) Indicar si *f* tiene extremos especificando de qué tipo de extremo se trata

**Ejercicio 6**:

Usando la expresión de la derivada calculada en el ejercicio 1c), calcular los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos de la función $f(x) = -x^2 + 3x - 2$