

NÚMEROS RACIONALES

Ejercicio 1

Federico tiene varias latas de pintura violeta y varias latas de pintura blanca, todas de la misma capacidad. Para pintar un mural, mezcló 10 latas de blanco con 4 latas de violeta. Pero no le alcanzó la pintura y necesita preparar más y que quede del mismo tono.

- a) Si quiere usar seis latas de pintura violeta ¿Cuánta pintura blanca necesita?

Sabemos que si usa 4 latas de pintura violeta, necesitará 10 latas de pintura blanca.

Entonces para saber cuántas latas de pintura blanca necesitará si usa 6 latas violetas, podemos pensar primero cuántas latas blancas necesitará si usara 2 latas violetas. En este caso, como va a utilizar la mitad de latas violetas, tendrá que usar la mitad de latas blancas, es decir $10 : 2 = 5$ latas blancas.

Ahora, para 6 latas violetas (el triple de 2 latas), necesitará también el triple de latas blancas, es decir $3 \cdot 5 = 15$ latas blancas.

- b) ¿Y si usa cinco latas de violeta?

Para 1 lata violeta va a necesitar $10 : 4 = 2,5$ latas de pintura blanca. Luego, para 5 latas de pintura violeta va a necesitar $2,5 \cdot 5 = 12,5$ latas de pintura blanca.

Podemos expresar esta cantidad como número mixto ya que representa 12 latas y media, es decir $12\frac{1}{2}$ y como 12 latas son 24 medias latas, sumando una mitad más, podemos representarla en forma de fracción: $\frac{25}{2}$

- c) Si usa doce latas de pintura blanca ¿Cuántas latas de violeta necesita para obtener el mismo tono?

Como usa 4 violetas cada 10 blancas, para 2 blancas usará $4 : 5 = \frac{4}{5}$ latas violetas.

Luego para saber cuántas latas necesitaré para 12 blancas, es decir $2 \cdot 6$, multiplico $\frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{24}{5}$

- d) Por cada lata de pintura blanca ¿qué cantidad de lata de pintura violeta necesita para tener el mismo tono?

Necesitará $4 : 10 = \frac{4}{10} = 0,4$ latas de pintura violeta.

- e) Para ayudar a Federico, Marcelo mezcla dos latas de violeta con seis latas de blanco. El color que obtuvo Marcelo ¿Es el mismo que el de Federico, es más claro, o más oscuro? Explicá tu respuesta.

Habíamos visto que para 2 latas de violeta iba a necesitar 5 latas de pintura blanca si quería mantener el mismo tono.

Como Marcelo las mezcla con 6 blancas obtendrá un color más claro.

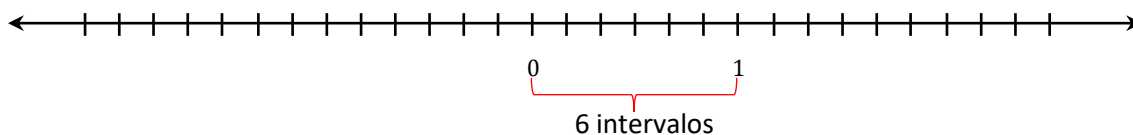
Recordá

$\frac{4}{3}$ → Numerador
→ Denominador

- Dos fracciones son equivalentes si representan al mismo número. Por ejemplo, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{2}$ son equivalentes.
- Para obtener una fracción equivalente a otra dada se multiplican el numerador y el denominador por un mismo número natural, o se dividen numerador y denominador por un divisor de ambos.
- Una fracción es irreducible si el numerador y el denominador son coprimos, es decir, si el único divisor común natural que tienen es 1.
- **Simplificar** una fracción significa dividir el numerador y el denominador de ésta por un divisor de ambos (distinto de 1 o -1).
- Tené en cuenta que dos fracciones pueden ser equivalentes aunque una no se obtenga de la otra multiplicando o dividiendo por un mismo número natural. Por ejemplo: $\frac{8}{6}$ y $\frac{12}{9}$ son equivalentes ya que las dos tienen la misma fracción irreducible equivalente: $\frac{4}{3}$. Sin embargo, no es posible obtener $\frac{12}{9}$ multiplicando o dividiendo el numerador y denominador de $\frac{8}{6}$ por el mismo número natural.

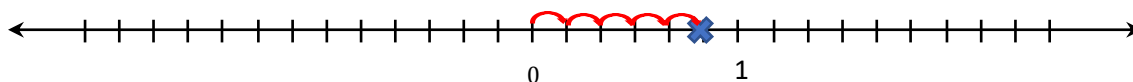
Ejercicio 2

- a) Marcá en la siguiente recta los números $\frac{5}{6}$; $2\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; $-\frac{3}{2}$

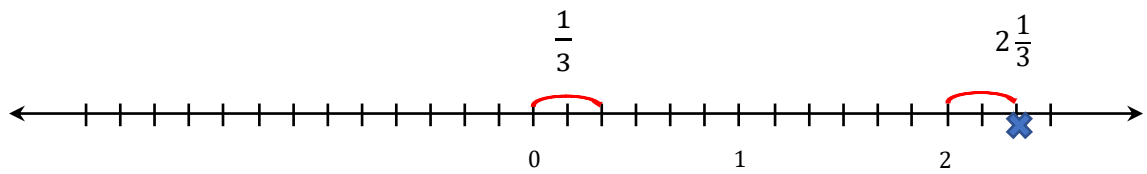


La unidad está dividida en 6 partes iguales. Cada una de ellas representa $\frac{1}{6}$ de la unidad.

Para ubicar $\frac{5}{6}$ cuento 5 intervalos a partir del 0.

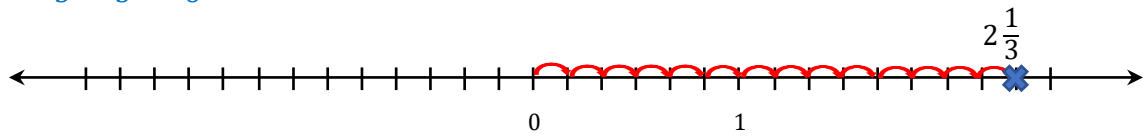


Veamos como marcar $2\frac{1}{3}$. Una posibilidad es dividir el entero en tres partes, y luego ubico dos unidades y un tercio mas

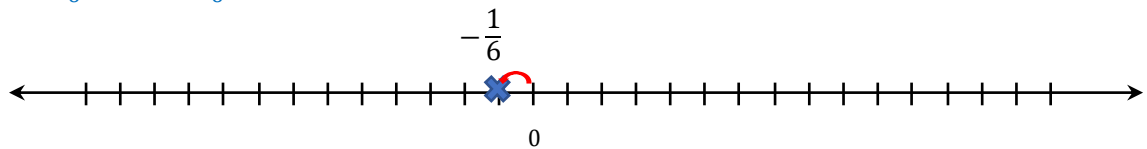


Otra posibilidad es obtener una fracción equivalente de denominador 6:

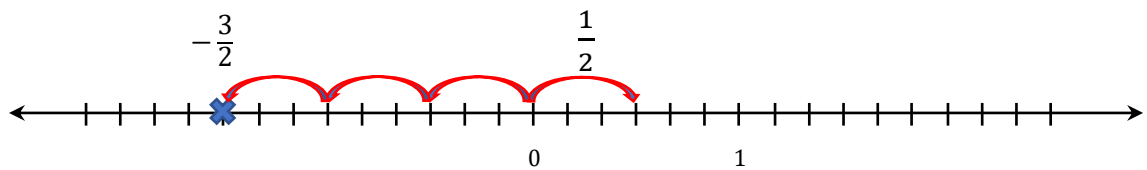
$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{14}{6}$$



$-\frac{1}{6}$ lo ubicaré $\frac{1}{6}$ a la izquierda del 0



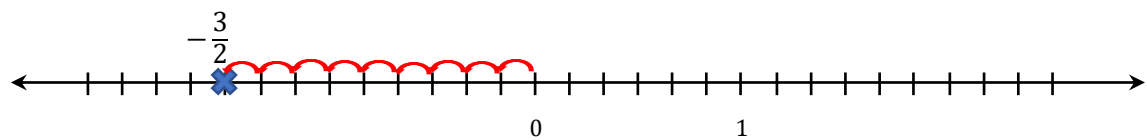
Finalmente, para ubicar $-\frac{3}{2}$. Una posibilidad es dividir el entero en dos partes,



Otra posibilidad es obtener una fracción equivalente de denominador 6, para ello multiplico el numerador y el denominador por 3:

$$-\frac{3}{2} = -\frac{9}{6}$$

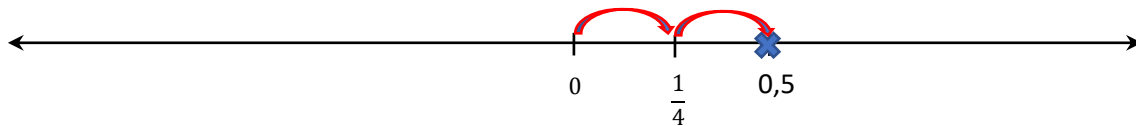
x3



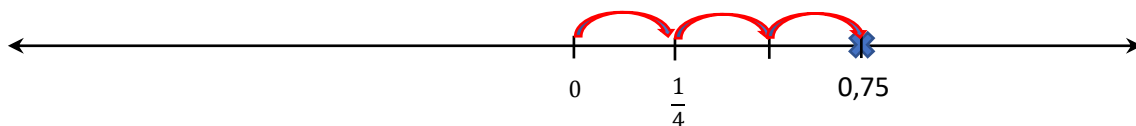
b) En la siguiente recta están marcados los números 0 y $\frac{1}{4}$.

i. Ubicá los números 0,5; 0,75; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$ y 1

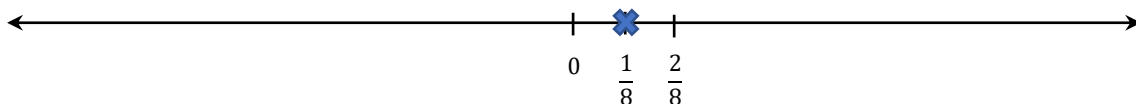
En primer lugar buscamos la expresión fraccionaria de $0,5 = \frac{1}{2}$ y luego una fracción equivalente de denominador 4, en este caso: $\frac{2}{4}$



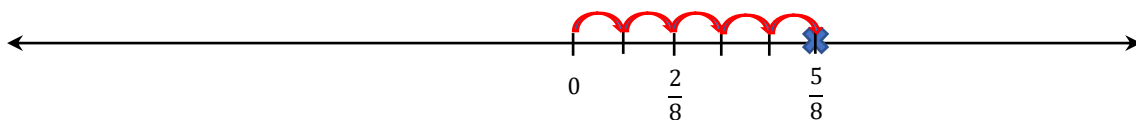
Luego buscamos la expresión fraccionaria de $0,75 = \frac{75}{100}$ y luego una fracción equivalente de denominador 4, en este caso: $\frac{3}{4}$



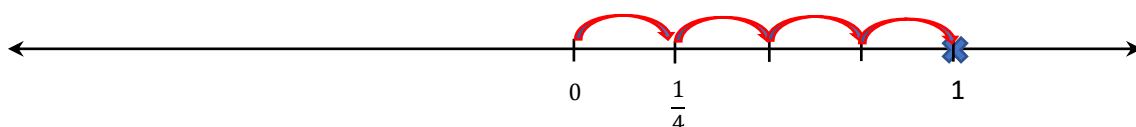
Para poder ubicar $\frac{1}{8}$ buscamos una fracción equivalente a $\frac{1}{4}$ (el número que está ubicado en la recta numérica) de denominador 8, en este caso: $\frac{2}{8}$
Luego si dividimos a la mitad el intervalo, allí ubicaremos el número indicado.



De la misma forma, podemos ubicar $\frac{5}{8}$ buscamos una fracción equivalente a $\frac{1}{4}$ (el número que está ubicado en la recta numérica) de denominador 8, en este caso: $\frac{2}{8}$

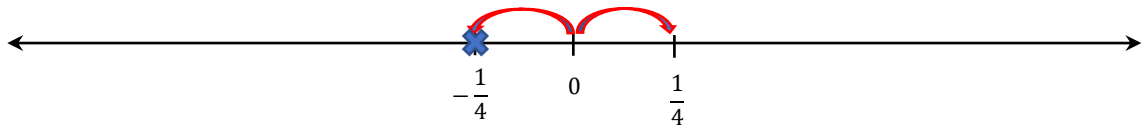


Para ubicar el 1 (la unidad, que lo podemos pensar como $\frac{1}{1}$) buscamos una fracción equivalente de denominador 4, en este caso: $\frac{4}{4}$

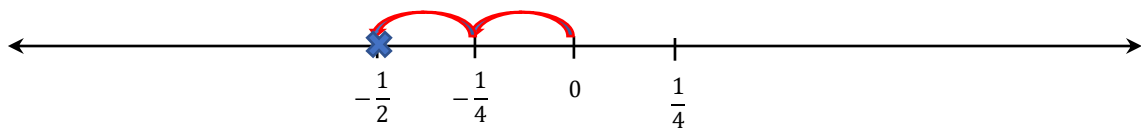


ii. Ubicá los números $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $-0,75$; $-\frac{3}{8}$; $-\frac{5}{8}$

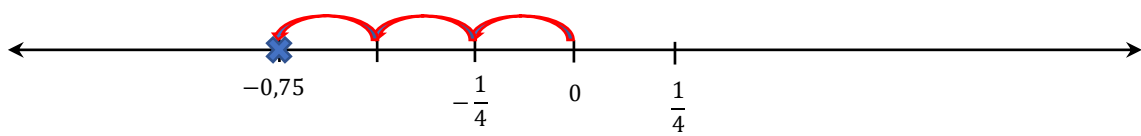
El número $-\frac{1}{4}$ es el opuesto de $\frac{1}{4}$ por lo tanto se ubicará a la misma distancia del 0, pero a la izquierda del mismo.



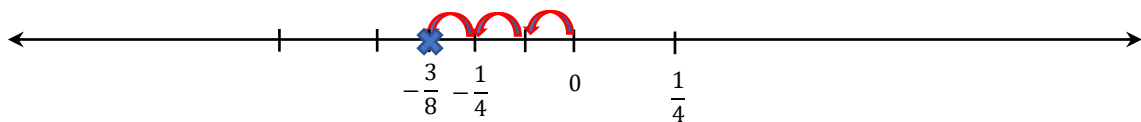
Buscaremos una fracción equivalente a $-\frac{1}{2}$ de denominador 4, en este caso: $-\frac{2}{4}$. Luego ya podemos ubicarlo.



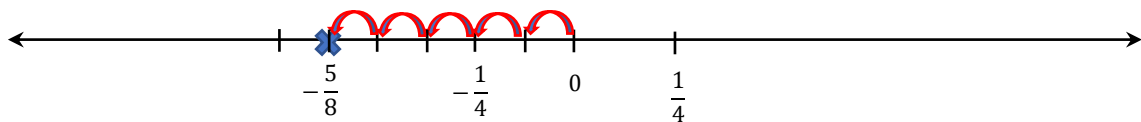
Ahora buscamos la expresión fraccionaria de $-0,75 = -\frac{75}{100}$ y luego una fracción equivalente de denominador 4, en este caso: $-\frac{3}{4}$



Para ubicar $-\frac{3}{8}$ trabajaremos de manera similar a como lo hicimos para ubicar $\frac{1}{8}$



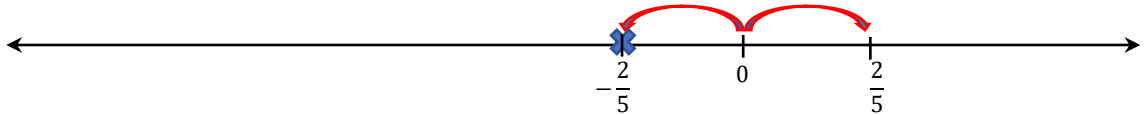
Luego podemos ubicar $-\frac{5}{8}$



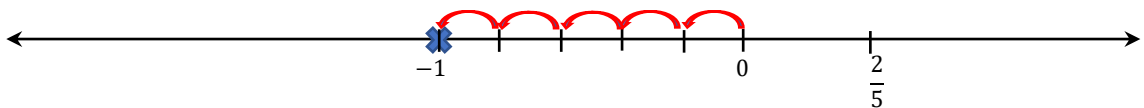
c) En la siguiente recta están marcados los números 0 y $\frac{2}{5}$

i. Ubicá los números $-\frac{2}{5}$ y -1 en la recta anterior.

El número $-\frac{2}{5}$ es el opuesto de $\frac{2}{5}$ por lo tanto se ubicará a la misma distancia del 0, pero a la izquierda del mismo.

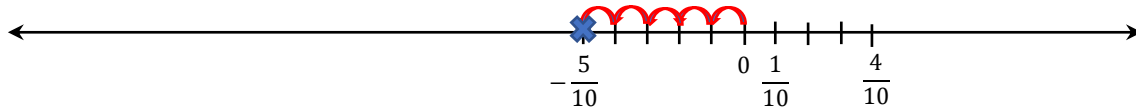


Para ubicar el -1 (que lo podemos pensar como $-\frac{1}{1}$) buscamos una fracción equivalente de denominador 5, en este caso: $-\frac{5}{5}$

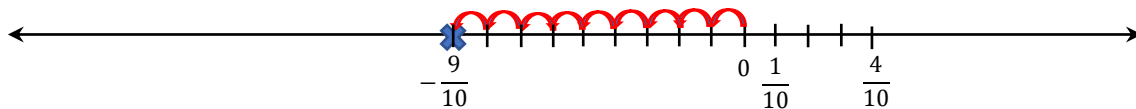


ii. Ubicá los números $-\frac{1}{2}$ y $-0,9$ en la misma recta.

Intentaremos buscar una fracción equivalente a $-\frac{1}{2}$ de denominador 5, pero se nos presenta el inconveniente de que 5 no es múltiplo de dos, entonces buscaremos un denominador que sea múltiplo de 2 y de 5, por ejemplo 10. Luego la fracción equivalente con denominador 10 es: $-\frac{5}{10}$. Luego $\frac{2}{5}$ podemos expresarlo como $\frac{4}{10}$.



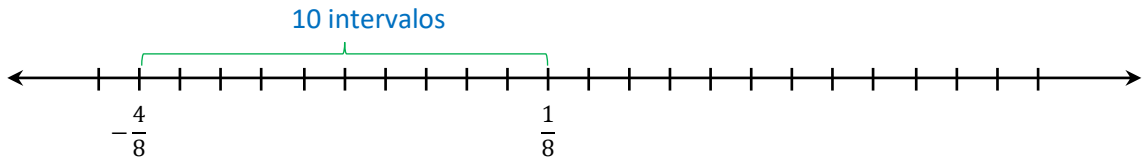
La expresión decimal de $-0,9$ es $-\frac{9}{10}$ entonces ya podremos ubicarlo en la recta:



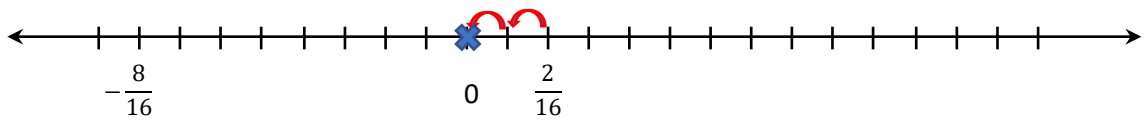
d) Ubicá 0 y $\frac{1}{2}$ en la siguiente recta.

Buscamos que los dos números que tengo ubicados en la recta tengan igual denominador, entonces una fracción equivalente a $-\frac{1}{2}$ de denominador 8, en este caso es $-\frac{4}{8}$

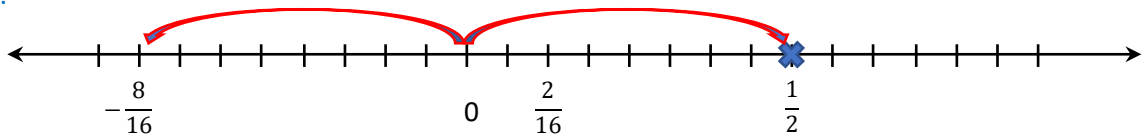
Entre $-\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{8}$ hay $\frac{5}{8}$ que es equivalente a $\frac{10}{16}$, por lo tanto, cada intervalo representa $\frac{1}{16}$



Luego expresamos los números que tenemos ubicados con denominador 16. El 0 se ubicará a dos intervalos a la izquierda de $\frac{2}{16}$.



El número $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{8}{16}$ por lo tanto se ubicará a igual distancia del 0 que $-\frac{8}{16}$ pero a su derecha.

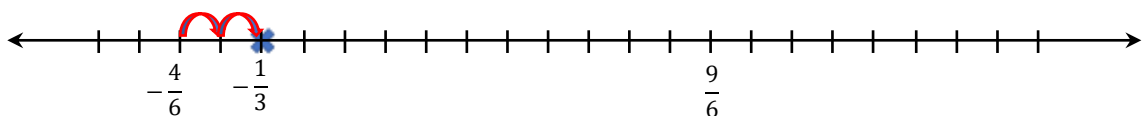


e) Ubicá $-\frac{1}{3}$ y 2 en la siguiente recta.

En primer lugar expresaremos las fracciones que tenemos en la recta con el mismo denominador, por ejemplo con denominador 6. $-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$

Luego como entre ambos números hay 13 intervalos y la diferencia entre ellos es $\frac{13}{6}$, cada intervalo representará $\frac{1}{6}$ de la unidad.

Como $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$, lo ubico dos intervalos a la derecha de $-\frac{4}{6}$



El conjunto de los *números racionales*, que se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$, está formado por todos los números que se pueden representar mediante una fracción.

Las fracciones negativas y las expresiones decimales negativas son los números opuestos de las fracciones positivas y de las expresiones decimales positivas correspondientes. Por ejemplo $-\frac{3}{5}$ es el opuesto de $\frac{3}{5}$ y $-27,58$ es el opuesto de $27,58$.

Para obtener la *expresión decimal* de una fracción, podemos dividir el numerador por el denominador. La expresión decimal tendrá el mismo signo que la fracción. Por ejemplo:

$$-\frac{3}{4} \rightarrow 3:4 = 0,75 \rightarrow -\frac{3}{4} = -0,75$$

Para obtener la *expresión fraccionaria* de un número racional si se conoce su expresión decimal, se busca una división que de por resultado ese número y se lo expresa como fracción. Por ejemplo:

$$-0,24 = -24:100 \rightarrow -0,24 = -\frac{24}{100} = -\frac{3}{25}$$

Si una fracción es mayor que la unidad, puede expresarse como *número mixto*. Para ello, se calcula cuántas veces entra el numerador en el denominador haciendo la división entera y se considera el resto como el numerador de la parte fraccionaria.

Por ejemplo, para expresar $\frac{37}{9}$ como número mixto calculamos:

$$\begin{array}{r} 37 \\ 9 \overline{) 37} \\ \underline{18} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{37}{9} = 4 \frac{1}{9}$$

Ejercicio 3

Tomando el ejemplo de la primera fila, completá la siguiente tabla:

Fracción irreducible	Una fracción equivalente	Expresión decimal	Entero anterior	Entero posterior
$\frac{7}{5}$	$\frac{28}{20}$	1,4	1	2
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{63}{84}$	-0,75	-1	0
$\frac{7}{10}$	$\frac{21}{30}$	0,7	0	1
$-\frac{13}{2}$	$-\frac{156}{24}$	-6,5	-7	-6
$-\frac{16}{5}$	$-\frac{32}{10}$	-3,2	-4	-3

Segunda fila:

Fracción irreducible: divido al numerador y al denominador por 21

$$\begin{array}{c} :21 \\ \text{---} \frac{63}{84} = \text{---} \frac{3}{4} \\ :21 \end{array}$$

Expresión decimal: realizo el cociente entre 3 y 4, considerando el signo negativo: $-3 : 4 = -0,75$

Entero anterior: es el primer entero que se encuentra a su izquierda en la recta numérica, en este caso el -1.

Entero posterior: es el primer entero que se encuentra a su derecha en la recta numérica, en este caso el 0.

Tercera fila:

Fracción irreducible: la expresión decimal de 0,7 es $\frac{7}{10}$ que es una fracción irreducible ya que el 7 y el 10 son coprimos.

Fracción equivalente: la obtengo multiplicando al numerador y al denominador por el mismo número, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \times 3 \\ \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \\ \times 3 \end{array}$$

Entero anterior: es el primer entero que se encuentra a su izquierda en la recta numérica, en este caso el 0.

Entero posterior: es el primer entero que se encuentra a su derecha en la recta numérica, en este caso el 1.

Cuarta fila:

Fracción equivalente: la obtengo multiplicando al numerador y al denominador por el mismo número, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \times 12 \\ \text{---} \frac{13}{2} = \text{---} \frac{156}{24} \\ \times 12 \end{array}$$

Expresión decimal: realizo el cociente entre 13 y 2, considerando el signo negativo: $-13 : 2 = -6,5$

Entero anterior: es el primer entero que se encuentra a su izquierda en la recta numérica, en este caso el -7.

Entero posterior: es el primer entero que se encuentra a su derecha en la recta numérica, en este caso el -6.

Quinta fila:

Fracción irreducible: la expresión decimal de -3,2 es $-\frac{32}{10}$. Para obtener la fracción irreducible divido el numerador y el denominador por 2 obteniendo $-\frac{16}{5}$.

Fracción equivalente: puedo considerar $-\frac{32}{10}$.

Entero anterior: es el primer entero que se encuentra a su izquierda en la recta numérica, en este caso el -4.

Entero posterior: es el primer entero que se encuentra a su derecha en la recta numérica, en este caso el -3.

Ejercicio 4

Sabiendo que m es un número entero ¿Qué valores puede tomar m para que el número $\frac{5}{m}$ sea mayor que 1?

Para que sea mayor que uno deberá ser, en primer lugar, un número positivo, por lo que descartamos que m pueda tomar valores negativos. Tampoco puede tomar el valor 0 ya que el denominador no puede tomar nunca ese valor.

Si m toma el valor 5 obtendríamos la fracción $\frac{5}{5} = 1$ por lo que también descartamos ese número.

En el caso de que $m > 5$ el numerador sería menor que el denominador y en ese caso las fracciones representarían valores menores que la unidad.

Por lo tanto m puede ser cualquier número natural mayor que 0 y menor que 5, entonces m podrá ser igual a 1, 2, 3 o 4.

Ejercicio 5

Completá con **mayor**, **menor** o **igual** según corresponda:

- a) Un número racional positivo es *mayor que 1* si el numerador es **mayor** que el denominador.
- b) Un número racional positivo es *menor que 1* si el numerador es **menor** que el denominador.
- c) Un número racional negativo es *mayor que -1* si el valor absoluto del numerador es **menor** que el valor absoluto del denominador.
- d) Un número racional negativo es *menor que -1* si el valor absoluto del numerador es **mayor** que el valor absoluto del denominador.
- e) Un número racional positivo es *igual a 1* si el numerador es **igual** que el denominador.
- f) Un número racional negativo es igual a -1 si el valor absoluto del numerador es **igual** que el valor absoluto del denominador.

Ejercicio 6

Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus respuestas.

a) $-\frac{1}{2}$ es mayor que 0,25.

Es FALSA ya que todo número negativo es menor que cualquier número positivo.

b) $\frac{1}{3}$ es la mitad de $\frac{1}{6}$.

Es FALSA porque una expresión equivalente a $\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{6}$, por lo tanto, es el doble de $\frac{1}{6}$.

c) $\frac{5}{6}$ es el doble de $\frac{5}{12}$.

Es VERDADERA pues una expresión equivalente a $\frac{5}{6}$ es $\frac{10}{12}$, por lo tanto, es el doble de $\frac{5}{12}$.

d) $\frac{7}{3}$ es la mitad de $\frac{14}{6}$.

Es FALSA ya que una expresión equivalente a $\frac{7}{3}$ es $\frac{14}{6}$, por lo tanto, las dos fracciones son equivalentes.

Ejercicio 7

Completá con <, > ó =, según corresponda:

a) $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ una expresión equivalente a $\frac{2}{3}$ es $\frac{16}{24}$, y una equivalente a $\frac{5}{8}$ es $\frac{15}{24}$, por lo tanto, al tener igual denominador y mayor numerador, el primer número será mayor.

b) $-\frac{7}{5} < \frac{6}{5}$ debido a que todo número negativo es menor que cualquier número positivo.

c) $\frac{12}{32} = \frac{15}{40}$ simplificando ambas fracciones obtengo que la fracción irreducible de las dos es $\frac{3}{8}$.

d) $-\frac{7}{9} < -\frac{5}{7}$ una expresión equivalente a $-\frac{7}{9}$ es $-\frac{49}{63}$, y una equivalente a $-\frac{5}{7}$ es $-\frac{45}{63}$, por lo tanto, teniendo en cuenta que son números negativos, el primero será menor.

Toda fracción positiva es mayor a otra negativa.

Las fracciones con igual denominador se ordenan según su numerador, mientras que las fracciones con igual numerador se ordenan según su denominador, en el otro sentido.

Si son fracciones con distinto numerador y distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes con igual denominador.

Ejercicio 8

Escribí tres números racionales comprendidos entre:

- a) $-\frac{7}{4}$ y $-\frac{3}{4}$ tres posibles números pueden ser $-\frac{3}{2}$ (que es equivalente a $-\frac{6}{4}$), $-\frac{5}{4}$ y -1
- b) $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$ en este caso podríamos nombrar al $\frac{4}{7}$ pero para poder obtener dos más tengo que utilizar fracciones equivalentes de un denominador mayor, por ejemplo 70 (amplifico multiplicando los numeradores y denominadores por 10), entonces buscaré números entre $\frac{30}{70}$ y $\frac{50}{70}$ pudiendo nombrar, por ejemplo, el $\frac{41}{70}$ y el $\frac{31}{70}$.
- c) $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{5}{6}$ una expresión equivalente a $-\frac{2}{3}$ con denominador 6 es $-\frac{4}{6}$, entonces estamos buscando número que se encuentren entre $-\frac{5}{6}$ y $-\frac{4}{6}$. Para poder hallarlos tenemos que amplificar ambas fracciones, por ejemplo, multiplicando ambos numeradores y denominadores por 8 (puede ser cualquier número entero distinto de 0), obteniendo las fracciones equivalentes $-\frac{40}{48}$ y $-\frac{32}{48}$. Ahora podemos mencionar los números $-\frac{37}{48}$, $-\frac{33}{48}$, $-\frac{39}{48}$.

Ejercicio 9

Determinen todos los números enteros comprendidos entre:

- a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{17}{3}$ Las expresiones decimales de estas fracciones son, respectivamente, 0,5 y $5,\hat{6}$ por lo tanto los números enteros que se encuentran comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{17}{3}$ son el 1, el 2, el 3, el 4 y el 5.

También se puede expresar la fracción $\frac{4}{7}$ como número mixto $5\frac{2}{3}$.

- b) $-\frac{15}{4}$ y $-\frac{80}{11}$ Las expresiones decimales de estas fracciones son, respectivamente, -3,75 y $-7,\overline{27}$ por lo tanto los números enteros que se encuentran comprendidos entre $-\frac{15}{4}$ y $-\frac{80}{11}$ son el -7, el -6, el -5, y el -4.

Si los expresamos como números mixtos obtendríamos $-3\frac{3}{4}$ y $-7\frac{3}{11}$.

Ejercicio 10

Considerá el conjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} / 8 < x \leq 9\}$

- a) Escribí, si es posible, cinco números enteros que pertenezcan a este conjunto. ¿Cuántos hay? ¿Por qué?

No es posible escribir cinco número enteros ya que el único que está incluido en el conjunto C es el 9.

- b) Escribí, si es posible, cinco fracciones que pertenezcan a este conjunto. ¿Cuántas hay? ¿Por qué?

Puedo pensar en la expresión decimal de números comprendidos entre ellos y luego hallar su expresión fraccionaria, por ejemplo:

$$8,1 = \frac{81}{10} \quad 8,25 = \frac{825}{100} \quad 8,000001 = \frac{8000001}{1000000}$$

O puedo buscar fracciones equivalentes a 8 y 9 con igual denominador y luego encontrar fracciones comprendidas entre ellas:

$$8 = \frac{40}{5} \quad 9 = \frac{45}{5}, \text{ entonces en el conjunto } C \text{ se encontrarán } \frac{43}{5}, \frac{44}{5}$$

- c) Proponé una fracción con denominador 38 que pertenezca a este conjunto.

$$8 = \frac{304}{38} \quad 9 = \frac{342}{38}, \text{ entonces en el conjunto } C \text{ se encontrará, por ejemplo } \frac{321}{38}.$$

Bibliografía consultada

- Borsani, V., Lamela, C., Murúa, R., Sesa, C. (coord.) (2015). *Hacer Matemática 1/2*. Boudlonge: Estrada
- Negrin, Hugo y Mastroianni, Ana (coord.) (2018), *Matemática 2*, Buenos Aires, Edelvis.