

Práctica 3: Sucesiones

Ejercicio 1 Dadas las sucesiones

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} & b_n &= \frac{2^{n-1}}{(2n-1)^3} \\ c_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} & d_n &= \frac{\cos(n\pi)}{n} \end{aligned}$$

Calcule a_9 ; b_5 ; c_3 ; d_{11} .

Ejercicio 2 Para cada una de las siguientes sucesiones, proponga el término general a_n y clasifique las mismas en convergentes o divergentes.

$$\begin{aligned} a) & 1, 2, 3, 4, \dots & f) & 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots \\ b) & -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots & g) & 1, -1, 1, -1, \dots \\ c) & 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots & h) & 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \\ d) & \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots & i) & 1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots \\ e) & -1, 2, -3, 4, \dots \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Sea $a_n = \frac{n}{n+10,5}$. Decida por la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- b) $a_n > 0,9$ para casi todo n .
- c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 1$
- d) La sucesión está acotada superior e inferiormente.

Ejercicio 4 Sea $b_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$. Calcule:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad b) \sup \{b_n / n \in \mathbb{N}\} \quad c) \inf \{b_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Ejercicio 5 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

$$\begin{aligned} a) & a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{2n}{n+1} \right)^3 & e) & e_n = \frac{\sqrt{n^3} + 2}{n^2 - 1} \\ b) & b_n = \frac{3n^2 + 2}{2n^2 + 5n} & f) & f_n = \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{9n^2 + 2}} \\ c) & c_n = \frac{3n^2 + 2}{2n^3 + 5n} & g) & g_n = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \\ d) & d_n = \frac{-4n^3 + 2n^2 - 3n - 1}{5n^2 + 4} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) a_n = \frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} + \frac{n^2 + 5}{n + 1}$$

$$b) b_n = \frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} - \frac{n^2 + 5}{n + 1}$$

$$c) c_n = \sqrt{n^2 + n - 2} + n$$

$$d) d_n = \sqrt{n^2 + n - 2} - n$$

$$e) e_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n - 3}$$

$$f) f_n = \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}} + \frac{3n - 1}{2n + 3}$$

$$g) g_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$h) h_n = n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$i) i_n = \frac{n}{\sqrt{n+1} - n}$$

$$j) j_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n})$$

Ejercicio 7 Muestre que cada una de las siguientes situaciones constituye una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n.$$

Ejercicio 8

a) Marque la única respuesta correcta: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y b_n es acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$

☐ oscila ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ está acotada.

$$b) \text{ Calcule } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n+1} + \cos n$$

c) Marque la única respuesta correcta: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

☐ es igual a 0 ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ no existe

$$d) \text{ Calcule } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{n^2 + 1}$$

Ejercicio 9 Calcule, si existen, los siguientes límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 5}{n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + (-1)^n) \sin n}{n}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1, 5)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \operatorname{sen} n)(0, 8)^n$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0, 9)^n (1, 1)^{n+1}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1} + 2}{2^{2n} + 2^n}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n^3 + 2n^2 + 1}{n^2 + 2}}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5n + 1}{3n + 1}}$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{5n^2 + 3} \right)^{1/n}$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}$

Ejercicio 10 Muestre que las siguientes situaciones constituyen una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{a_n}$

Ejercicio 11 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{n-1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{17}{n} \right)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 - 5} \right)^{\frac{n^2 + 2}{2n + 1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{3n - 5} \right)^n$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 1}{3n - 5} \right)^n$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cos n}{5n^3 + 1} \right)^{2n^2 + 3}$

Ejercicio 12 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + n}{2^{n+1} + n^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} + \cos n}{2 \cdot 9^n + \sin n}$$

Ejercicio 13 Calcule, si existen, los siguientes límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^n}{n!}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{n!}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n!}{3^n + 5n!}$$

Ejercicio 14 En cada caso, la sucesión a_n se encuentra sujeta a las condiciones indicadas. Calcule, cuando sea posible, su límite.

$$a) 2 - \frac{3}{2^n} < 5 - 2a_n < 1 + \sqrt[n]{n}$$

$$c) 0 < 3a_n + 2 < \frac{2^n n!}{n^{2n+1}}$$

$$b) \frac{1}{a_n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$d) 2a_n + 6 > \frac{1}{\sqrt[n]{n+1} - 1}$$

Ejercicio 15 Usando subsucesiones, pruebe que cada una de las siguientes sucesiones carece de límite:

$$a) 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$$

$$b) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$c)$$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 16 Se sabe que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$. Calcule

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{3n}).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ejercicio 17 Considere la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule el cociente de D' Alembert. A partir del mismo, concluya que la sucesión es creciente.

b) Muestre que $a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Ejercicio 18 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones dadas en forma recurrente:

a) $a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n}.$

b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^n + 3^n}{n!} a_n.$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n+1} + (-1)^n \frac{n^5 + \cos n}{2 - 6^n} \right)$$

Ejercicio 2 Sean $a_n = n(0,95)^n$ y $b_n = \frac{(1,02)^n}{\sqrt{n}}$. Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)(b_n).$

Ejercicio 3 Muestre que el valor del $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^{n^2}$ no depende de la constante b .

Ejercicio 4 Sea a_n una sucesión definida en forma recurrente como :

$$a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{5n}.$$

Se define $b_n = n^2 a_n$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ejercicio 5 Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sabiendo que $0 < 5 - 3a_n \leq 7^n \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{n^2}$

Ejercicio 6 Halle los valores de a y b para que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^6 + 3bn^4 + 2\sqrt{n}}{5n^4 - 3n + 4} = 4.$$

Ejercicio 7 Se definen $a_n = (-1)^n \frac{3n-1}{7n+2}$ y $b_n = (a_n)^2$.

a) Pruebe por medio de subsucesiones que a_n no tiene límite.

b) Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ejercicio 8 Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión $a_n = \frac{x^{2n+1}}{n^3 4^{n+1}}$ es convergente. Para los x hallados calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ejercicio 9 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n n^2 + n}.$$

Ejercicio 10 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + 7n^2}{5 + n^2} + \sqrt{n^2 + 6n + 17} - \sqrt{n^2 + 17} \right).$$

Ejercicio 11 Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + n^2 + 1} \right)^{3n^2} + \frac{\sin(n^4 + 2n^2)}{3n^2} \right]$$

Ejercicio 12 Sea $a_n = \frac{\cos(3n) + n!}{n + 2^n}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 5}{2a_n + 7}$.

Ejercicio 13 Sea a_n tal que $5n - 6n^2 - 7 < 4n^2 a_n < \frac{n^3 + n^2 3^n}{n!} - 6n^2$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ejercicio 14 Halle $a \in \mathbb{R}$ para que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + a}{5n^3 + 3} \right)^{4n^3} = e^3$.

Ejercicio 15 Si la sucesión a_n satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ y $a_n > 4$, calcule el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{12 + a_n} - \sqrt{4a_n}}{(a_n)^2 - 2a_n - 8}.$$

Ejercicio 16 Sea $a_n = \left(\frac{5n+8}{5n+3}\right)^n \frac{n^5+1}{n^4+1}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(5a_n)}{\sqrt{a_n}}$.

Ejercicio 17 Sea a_n tal que $\left(\frac{2n+11}{2n+3}\right)^n \leq 2a_n - 6 \leq e^7 + \frac{\cos(9n)}{4^n}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.