

Práctica 11: Series

Ejercicio 1 Escriba el término general de las siguientes series

$$\begin{array}{ll} a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots & c) 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \\ b) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \dots & d) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots \end{array}$$

En los casos que la serie sea geométrica o telescópica, escriba la expresión de las sumas parciales y calcule la suma de la serie.

Ejercicio 2 Calcule la suma de las siguientes series, en caso de que sean convergentes.

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{5^n} & e) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\ c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{4^{n+1}} & f) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \end{array}$$

Ejercicio 3 Calcule el valor de $a > 0$ para que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{a^n} = \frac{35}{12}$.

Ejercicio 4 A partir de la identidad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, deduzca las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{l} a) 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \\ b) x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \\ c) 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1 \\ d) 1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots = \frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2} \end{array}$$

Ejercicio 5 Decida si cada una de las siguientes series es convergente o divergente:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 1}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^4 + 5n - 1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n)}{2^n + n^2}$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

Ejercicio 6 Use el criterio integral de Cauchy para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

Ejercicio 7 Use el criterio de la raíz o del cociente, según convenga, para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n 2}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Ejercicio 8 Determine la convergencia o divergencia de las series que siguen. En caso de convergencia, decida si ésta es absoluta o condicional.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+5n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

Ejercicio 9 Sea $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$. Pruebe que la serie alternada

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es absolutamente convergente.

Ejercicio 10 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada una de las siguientes series es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{x^{2n}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} x^{2n+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$$

Ejercicio 11 Halle el radio de convergencia de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$$

Ejercicio 12 En cada una de las siguientes series, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2n+1}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{2^n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) x^{2n+1}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-2)^n$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) x^n$$

$$j) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n^2 \ln n}$$

$$k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n} (x-2)^n$ tiene radio de convergencia igual a 2?

Ejercicio 2 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (3x-1)^n$ es convergente. Para los valores hallados, encuentre la suma de la serie.

Ejercicio 3 Halle los valores de $p > 0$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt{n^7+1}}$ es convergente.

Ejercicio 4 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^2}{8^n} (x-3)^{3n+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n} x^{3n}$$

$$\begin{array}{ll} c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n+4)(5^n+1)} (3x-6)^n & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{\sqrt{9n+1}} (x-7)^n \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n x^n & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n \sqrt{n^2+3}} \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(x-5)^n}{(n+1)(n+4)} & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}} \\ f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n} (x-3)^{n+1} & j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{n+1}}{3^n} \end{array}$$

Ejercicio 5 Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2} (x-7)^n$.

Ejercicio 6 Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{a^n \sqrt{2n+1}}$ hallar $a > 0$ para que el radio de convergencia sea igual a 2. Para el valor de a hallado, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.