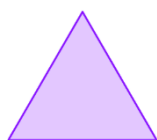


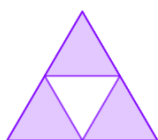
NÚMEROS RACIONALES – Actividad 4

Ejercicio 1

El triángulo de Sierpinski es una figura que se forma dividiendo un triángulo cualquiera en cuatro triángulos iguales trazando los segmentos que unen los puntos medios de sus lados y retirando el triángulo central. Este proceso se repite indefinidamente para cada uno de los triángulos que quedan. En las figuras pueden ver el triángulo inicial (etapa 0) y las tres primeras etapas.



Etapa 0



Etapa 1



Etapa 2



Etapa 3

- a. Calculá qué parte del triángulo representa la zona sombreada en cada etapa.

$$E_0: \frac{1}{1} = 1$$

$$E_1: \frac{3}{4} \text{ (el triángulo está dividido en 4 triángulitos y hay 3 sombreados)}$$

$$E_2: \frac{9}{16}$$

$$E_3: \frac{27}{64}$$

- b. Luciana se dio cuenta que en cada etapa la parte sombreada es $\frac{3}{4}$ de la parte sombreada en la etapa anterior. Teniendo en cuenta esta idea completá la parte sombreada en las siguientes etapas:

$$E_4: \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$E_5: \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$E_{20}: \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$$

$$E_n: \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Potenciación de números racionales

Al igual que con los números enteros, la potenciación con un exponente natural consiste en multiplicar la base la cantidad de veces que indique el exponente.

$$\text{Por ejemplo: } \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3^3}{2^3}$$

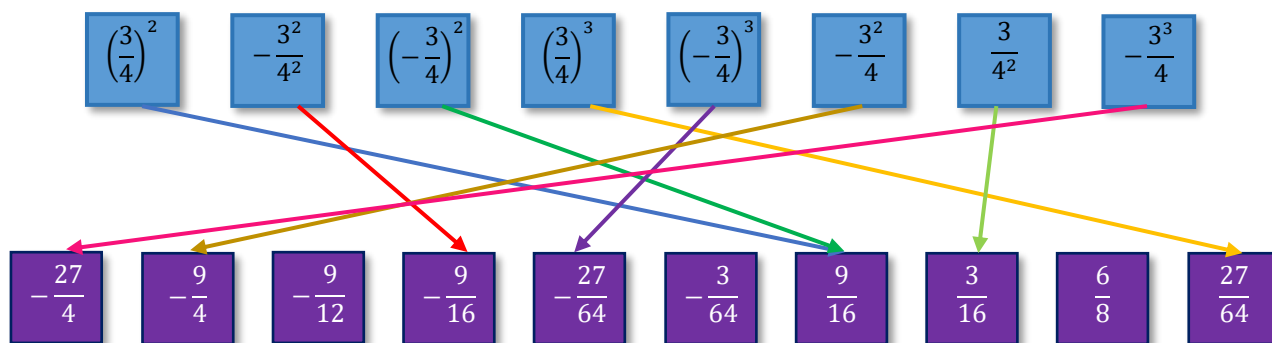
En general, para elevar una fracción a un exponente natural, podemos elevar el numerador y el denominador a dicho exponente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Si la base es negativa, para determinar el signo de la potencia usamos las propiedades que aprendimos en el capítulo de números enteros:

- Si el exponente es par, la potencia es positiva: $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{5^4} = \frac{1}{625}$
- Si el exponente es impar, la potencia es negativa: $\left(-\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{7^3} = \frac{-8}{343} = -\frac{8}{343}$

Ejercicio 2

Uní cada operación con su resultado.



Ejercicio 3

a. Completá con $>$, $<$ o $=$ según corresponda:

a. $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2$ Ambos dan por resultado $\frac{1}{36}$

b. $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 < \left(\frac{3}{5}\right)^3$ Porque $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$ y $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

c. $\left(\frac{2}{7}\right)^2 < \frac{2^2}{7}$ Pues $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$ y $\frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}$ y al tener igual numerador, la que tiene mayor denominador es menor.

d. $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 < -\frac{3}{2^3}$ Ya que $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$ y $-\frac{3}{2^3} = -\frac{3}{8}$ y al tener igual denominador, la que tiene mayor numerador es mayor en valor absoluto, pero al ser ambas negativas, es menor la primera.

b. En cada caso, ordená de menor a mayor.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^1$

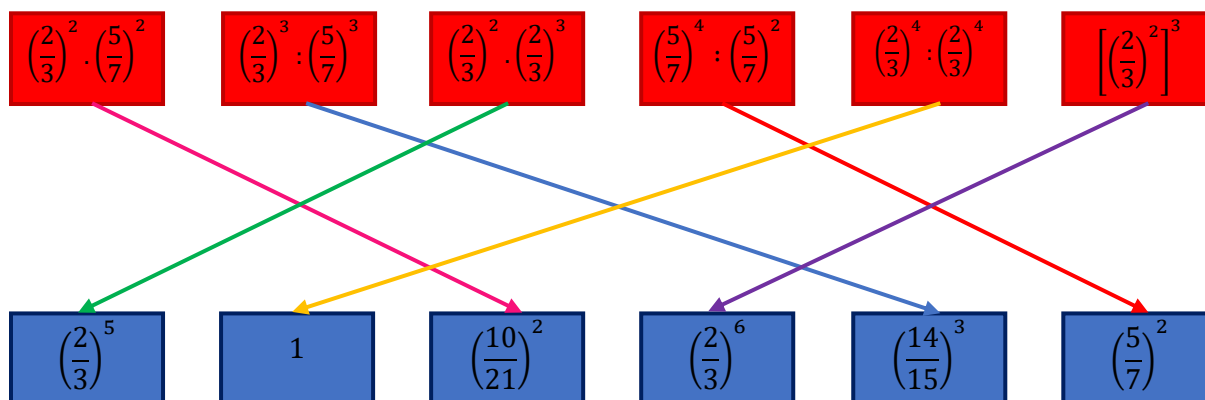
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{24}{81} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = \frac{36}{81} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3} = \frac{54}{81}$$

b. $\left(\frac{5}{4}\right)^1 < \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{5}{4} = \frac{320}{256} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = \frac{400}{256} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} = \frac{500}{256} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$$

Ejercicio 4

Uní cada operación en las tarjetas rojas con la operación equivalente en las tarjetas azules:



Propiedades de la Potenciación en $\mathbb{Q}$

La potenciación de números racionales cumple las mismas propiedades que la potenciación de números enteros (considerando que $b \neq 0$ y $d \neq 0$):

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$
- $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$ si $\frac{c}{d} \neq 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

Ejercicio 5

a. Completen las siguientes secuencias:

	Dividiendo ambos miembros por 2	Aplicando las propiedades de la potenciación (izquierda) y simplificando (derecha)
$2^4 = 2.2.2.2$	$\frac{2^4}{2} = \frac{2.2.2.2}{2}$	$2^{4-1} = 2.2.2$
$2^3 = 2.2.2$	$\frac{2^3}{2} = \frac{2.2.2}{2}$	$2^{3-1} = 2.2$
$2^2 = 2.2$	$\frac{2^2}{2} = \frac{2.2}{2}$	$2^{2-1} = 2$
$2^1 = 2$	$\frac{2^1}{2} = \frac{2}{2}$	$2^{1-1} = 1$

0

b. Después de completar el ejercicio anterior, Luciana se preguntó si no podía seguir la secuencia usando las propiedades de la potenciación. Ella completó la primera fila, completá las restantes:

$2^0 = 1$	$\frac{2^0}{2} = \frac{1}{2}$	$2^{0-1} = \frac{1}{2}$
$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{2^{-1}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$2^{-1-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{2^{-2}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$	$2^{-2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Potencia de exponente negativo

Si a es un número racional distinto de cero, se define $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Es decir, al elevar un número racional distinto de cero al exponente -1 se obtiene el inverso de dicho número.

En general, si n es un número natural:

$$r^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

Si el número está expresado como una fracción:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Por ejemplo:

- $17^{-1} = \frac{1}{17}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1.2} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
- $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$

c. Calculá las siguientes potencias:

i. $\left(\frac{9}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{9}$

ii. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

iii. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

vi. $(-3)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Ejercicio 6

Jesús encontró una varilla de madera, la cortó en segmentos iguales y armó una guarda como la de la figura.



- a. Si el área de cada cuadrado es de $\frac{441}{16} \text{ cm}^2$ ¿Cuánto medía la varilla antes de cortarla?

$$\text{Área del cuadrado} = l^2 \text{ luego } l^2 = \frac{441}{16} \text{ cm}^2 \text{ por lo tanto } l = \sqrt{\frac{441}{16} \text{ cm}^2} \text{ entonces } l = \frac{21}{4} \text{ cm}$$

Como la guarda está formada por 18 segmentos de $\frac{21}{4} \text{ cm}$ cada uno, la varilla medía $\frac{21}{4} \cdot 18 = \frac{189}{2} \text{ cm}$.

- b. Encuentren todos los números racionales que, elevados al cuadrado, dan por resultado $\frac{100}{49}$.

$$x^2 = \frac{100}{49} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{100}{49}} \Rightarrow |x| = \frac{10}{7} \Rightarrow x = \frac{10}{7} \text{ o } x = -\frac{10}{7}$$

- c. Encuentren todos los números racionales que, elevados al cubo, dan por resultado $\frac{1}{64}$.

$$x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

- d. ¿Es posible encontrar una fracción que, elevada al cuadrado, de por resultado $\frac{2}{5}$? Explicá tus respuestas.

$$x^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ pero no hay ningún número entero que elevado al cuadrado me de como resultado 5, por lo tanto, no se puede.}$$

- e. ¿Es posible encontrar una fracción que, elevada al cuadrado, de por resultado $-\frac{9}{4}$? Explicá tus respuestas.

$$x^2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow |x| = \sqrt{-\frac{9}{4}} \text{ pero no hay ningún número que elevado al cuadrado me dé como resultado un número negativo, por lo tanto, no se puede.}$$

Radicación de números racionales

Para calcular la raíz enésima de una fracción, se calcula (si es posible) la raíz enésima del numerador y la del denominador: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

Recordá que en las raíces de índice par el resultado es siempre positivo. Por ejemplo $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ aunque tanto $\frac{4}{3}$ como $-\frac{4}{3}$, al elevarse al cuadrado dan por resultado $\frac{16}{9}$.

Como vimos en los ejercicios anteriores, no siempre es posible calcular la raíz enésima de una fracción o su resultado no es un número racional.

Ejercicio 7

Calculá, si es posible, las siguientes raíces:

a. $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$

c. $\sqrt{-\frac{49}{64}} =$ No es posible

e. $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$ No es posible

b. $\sqrt[3]{\frac{1000}{343}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{10}{7}$

d. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{32}} = -\frac{1}{2}$

Ejercicio 8

a. Completá con $>$, $<$ o $=$ según corresponda:

$$\text{a. } \frac{9}{4} > \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{pues } \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

$$\text{b. } \sqrt{\frac{1}{169}} > \frac{1}{169} \quad \text{pues } \sqrt{\frac{1}{169}} = \frac{1}{13} = \frac{13}{169}$$

$$\text{c. } -\sqrt{\frac{196}{49}} > -\frac{196}{49} \quad \text{pues } -\sqrt{\frac{196}{49}} = -\frac{14}{7} = -\frac{98}{49}$$

$$\text{d. } \sqrt[3]{-\frac{27}{125}} < -\frac{27}{125} \quad \text{pues } \sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = -\frac{3}{5} = -\frac{75}{125}$$

b. En cada caso, calculá las raíces y ordená de menor a mayor:

$$\text{a. } \frac{1}{10000}; \sqrt{\frac{1}{10000}}; \sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{100} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10} \quad \text{luego, } \frac{1}{10000} < \frac{1}{100} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10000} < \sqrt{\frac{1}{10000}} < \sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$$

$$\text{b. } \frac{81}{16}; \sqrt{\frac{81}{16}}; \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4} = \frac{36}{16} \quad \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} = \frac{24}{16} \quad \text{luego, } \frac{24}{16} < \frac{36}{16} < \frac{81}{16}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} < \sqrt{\frac{81}{16}} < \frac{81}{16}$$

Ejercicio 9

Luciana: - Si elevamos un número positivo al cuadrado es siempre mayor que si calculamos su raíz cuadrada.

Jesús: - Con el 1 eso no pasa.

- a. ¿Tiene razón Jesús? ¿Por qué?

Si, tiene razón porque $1^2=1$ y $\sqrt{1}=1$, por lo tanto, no se cumple que su cuadrado sea mayor que su raíz cuadrada.

Luciana: - Bueno, pero todavía es cierto si elegís cualquier otro número distinto de 1.

Jesús: - Puedo encontrar números que no cumplen lo que decís.

- b. ¿Vos podés encontrar alguno? Si podés, escribilo.

Por ejemplo, el $\frac{4}{9}$ ya que $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$ y $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = \frac{54}{81}$

- c. Si llamás x al número que encontraste, ordená de menor a mayor x , x^2 y $\sqrt{x}$.

$$x^2 < x < \sqrt{x}$$



Observá que si $a > 1$ se cumple que $\sqrt{a} < a < a^2$ y si $0 < a < 1$ se cumple que $a^2 < a < \sqrt{a}$.

Más ejercicios para practicar:

1. Completá la siguiente tabla:

a	$a \cdot \frac{4}{5}$	$a : \left(-\frac{4}{3}\right)$	a^2	a^{-1}	$\sqrt{a}$
$\frac{25}{4}$	5	$-\frac{75}{16}$	$\frac{625}{16}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{20}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$	$-\frac{16}{9}$	
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{81}$	9	$\frac{1}{3}$
-4	$-\frac{16}{5}$	3	16	$-\frac{1}{4}$	

2. Si a es un número racional entre 6 y 7 ¿Entre qué enteros está ubicado a^{-1} ?

Entre 0 y 1.

3. Calculá y expresá el resultado como fracción irreducible:

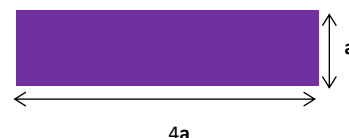
$$\begin{aligned} \text{a. } & \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{11}{7}} : (8^{-1} + 4^{-1} - 2^{-1}) = \\ & = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{11}{7}} : \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \\ & = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{77}{49}} : \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{4}{8}\right) = \\ & = \sqrt{\frac{81}{49}} : \left(-\frac{1}{8}\right) = \\ & = \frac{9}{7} \cdot \left(-\frac{8}{1}\right) = \\ & = -\frac{72}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & \frac{-5^{-1}}{-\frac{3}{5}+1} + \left(4^{-1} - \frac{1}{5}\right) - \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}}\right) = \\
& = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5} + \frac{5}{5}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{36}}\right) = \\
& = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} + \left(\frac{5}{20} - \frac{4}{20}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) = \\
& = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{20}\right) - \left(-\frac{3}{6} + \frac{5}{6}\right) = \\
& = -\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{20} - \left(\frac{2}{6}\right) = \\
& = -\frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{2}{6} = \\
& = -\frac{30}{60} + \frac{3}{60} - \frac{20}{60} = \\
& = -\frac{47}{60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } & \frac{\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{2}{7} \cdot 14}} + \left(\frac{10}{7}\right)^{-1} = \\
& = \frac{\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{10}{16} - \frac{4}{16}}}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{\sqrt{\frac{9}{16}}}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{\sqrt{\frac{9}{16}}}{\sqrt{\frac{25}{4}}} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \\
& = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{10}{10} = 1
\end{aligned}$$

4. Marquen con una cruz las expresiones que permitan calcular:

a. $\frac{2}{5}$ del perímetro del rectángulo:



☐ $2a$

☒ $4a$

☐ $\frac{2}{5}a$

☐ $\frac{2}{5} \cdot 5a$

☒ $\frac{2}{5} \cdot 10a$

b. $\frac{3}{8}$ del área del rectángulo:

☐ $\frac{3}{8}a$

☐ $\frac{3}{8} \cdot 5a$

☒ $\frac{3}{8} \cdot 4a^2$

☐ $\frac{3}{8}a^2$

☒ $\frac{3}{2}a^2$

c. Si el área del rectángulo es de 36 cm^2 ¿Cuánto mide el perímetro?

El perímetro es 30 cm.

5. El perímetro de la figura verde es $\frac{12}{5}a$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones les permiten calcular el área del cuadrado?

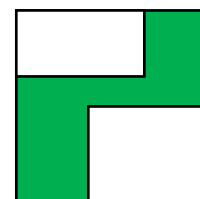
☐ $\frac{9}{25}a$

☐ $\frac{3}{5}a^2$

☒ $\frac{9}{25}a^2$

☐ $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{a}{4}\right)^2$

☒ $\left(\frac{3}{5}a\right)^2$



6. Expresá el resultado de:

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \frac{9}{25}}{\left(\frac{3}{5}\right)^5 \left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^{-3}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right)^{-12}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{5+2}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{5+(-12)}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^7}{\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^7}{\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{7-(-7)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{14}$$

como una potencia de base $\frac{3}{5}$

7. Sabiendo que x es un número racional, completan con los símbolos $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

a. Si $0 < x < 1$, entonces $x > x^2$

b. Si $0 < x < 1$, entonces $x < \sqrt{x}$

c. Si $x > 1$, entonces $x < x^2$

d. Si $x > 1$, entonces $x > \sqrt{x}$

e. Si $x = 1$, entonces $x = x^2$

f. Si $x = -1$, entonces $x < x^2$

g. Si $-1 < x < 0$, entonces $x < x^2$

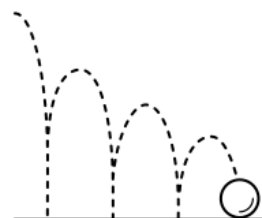
8. Luciana piensa que si **a** y **b** son números racionales y $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. ¿Es correcto lo que piensa? Expliquen su respuesta.

No, ya que si **a** y **b** son negativos menores que -1 no se cumple, por ejemplo:

$$a = -3 < b = -2 \text{ pero } a^2 = 9 > b^2 = 4$$

9. Cada vez que se hace rebotar una pelotita de goma alcanza $\frac{3}{4}$ de la altura que tenía. Si se la deja caer desde un metro de altura ¿Qué altura alcanza luego del cuarto rebote?

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 m = \frac{81}{256} m$$



Bibliografía consultada

- Negrin, Hugo y Mastroianni, Ana (coord.)(2018) , *Matemática 2*, Buenos Aires, Edelvives.