

Práctica 8: Teorema de Taylor

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$ y $p'''(0) = f'''(0)$.

Ejercicio 2 Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$	orden	5	$x_0 = 0$
b) $f(x) = \sen x$	orden	4	$x_0 = 0$
c) $f(x) = \sen x$	orden	5	$x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x$	orden	5	$x_0 = 0$
e) $f(x) = \ln x$	orden	4	$x_0 = 1$
f) $f(x) = \sqrt{x}$	orden	3	$x_0 = 4$
g) $f(x) = e^x$	orden	5	$x_0 = 0$
h) $f(x) = (1+x)^6$	orden	6	$x_0 = 0$

Ejercicio 3 Compruebe que el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ es $p(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 4 Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de las siguientes funciones en $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$	d) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = \cos x$	e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
c) $f(x) = \sen x$	f) $f(x) = \ln(1+x)$

Ejercicio 5 Sea $q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

a) Halle los polinomios de Taylor de q en $x_0 = 0$ de orden 1 a 6.

b) Haga lo mismo, sin hacer los cálculos, para

$$p(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ejercicio 6 Si el polinomio de Taylor de f de orden 5 en $x = 2$ es

$$p(x) = (x - 2)^5 + 3(x - 2)^4 + 3(x - 2)^2 - 8$$

calcule $f^{(4)}(2)$ y $f'''(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

Ejercicio 7 Los polinomios de Taylor de orden 4 en $x = 2$ de las funciones f y g son, respectivamente

$$p(x) = -2 + 3(x - 2) - 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \text{ y } q(x) = 5 + 12(x - 2)^2 - 7(x - 2)^4$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $t(x) = f(x)g(x)$ y $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en $x = 2$.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \ln(1 + x)$ y sea $p(x)$ su polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$.

Demuestre (usando el Teorema generalizado del Valor Medio (teorema de Cauchy)) que $\frac{f(x) - p(x)}{x^4} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$ para algún valor de c entre 0 y x .

Ejercicio 9 Escriba la expresión del resto en cada caso:

$$a) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

$$b) \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + R_5(x)$$

$$c) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$$

$$d) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$$

$$e) \ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + R_3(x)$$

Ejercicio 10 Para la función $f(x) = \cos x$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de orden 4 $p_4(x)$.

b) Escriba la expresión de $R_4\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Pruebe que $\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2^5 5!} < 0,0003$

Ejercicio 11 Se quiere aproximar $\sqrt[3]{e}$:

a) Pruebe que el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ lo consigue con un error menor que $\frac{1}{174960}$.

b) ¿De qué orden hay que tomar al polinomio de Taylor de la misma función para que el error sea menor que 10^{-8} ? (use que $e < 3$).

Ejercicio 12 Utilice el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin x$ para aproximar el valor de $\sin(0,25)$ y dé una cota para el error que se comete al tomar esta aproximación.

Ejercicio 13 Sea $f(x) = x \ln x$.

a) Halle el polinomio de Taylor p de orden 3 de f en $x = 1$. Escriba la expresión del resto.

b) Estime, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ por medio de $p(1,5)$.

Ejercicio 14 ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que aproxime a dicha función en todo el intervalo $[-1, 1]$ con un error menor que 10^{-4} ? Use el polinomio hallado para encontrar las primeras tres cifras decimales del número e .

Ejercicio 15 Sea $f(x) = \ln(1+x)$. ¿De qué orden hay que tomar el polinomio de Taylor en $x = 0$ para poder calcular $\ln(1,15)$ con un error que no supere a $0,001$?

Ejercicio 16 Halle un intervalo que contenga a $x = 0$ tal que la diferencia entre

a) $\cos x$ y $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ sea menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

b) $\sin x$ y x sea menor que 10^{-3} .

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Halle los valores de a y de b de modo que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = a \ln(1 + bx)$ en $x = 0$ sea $p(x) = 2x + \frac{3}{2}x^2$.

Ejercicio 2 Sea $f(x) = 1 + 3x + \sin x$. Escriba $p(x)$, el polinomio de Taylor de f de orden 4 en $x = 0$ y calcule, estimando el resto, el error que se comete al calcular $f\left(\frac{1}{3}\right)$ con $p\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4 Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Estime el error que se comete al calcular los valores de la función por medio del polinomio hallado cuando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Ejercicio 5 Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de

$$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$$

en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

Ejercicio 6 La función $f(x) = \sqrt[n]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ a

$$p(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2.$$

Halle los valores de a y de n .

Ejercicio 7 La función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x) + f(x) = 1$, $f(0) = 2$. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \sqrt{ax+1}$ y $p(x) = 1 + 2x + bx^2$. Determine los valores de a y de b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9 Se sabe que la función $f(x)$ cumple $f''(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + a} + 7$ y que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = 2 - 7(x-1) + 4(x-1)^2.$$

Halle el valor de a y calcule el polinomio de Taylor de f de orden 3 en $x_0 = 1$.

Ejercicio 10 Sea $f(x) = 3 + (x + 2)e^{ax}$. Halle $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la recta tangente en $(0; f(0))$ tiene ecuación $y = 5 + 10x$. Calcule $p_2(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de f .

Ejercicio 11 Sea $g(x) = 1 - 3x + \sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de g es $p(x) = 2 - x + 3x^2$, halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 12 Sea $g(x) = 3 + 2x + \cos(f(x))$. Sabiendo que

$$p(x) = 2x + 5x^2 - 3x^3$$

es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de g , halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.