

Prefacio

Este libro está pensado para acompañar a los estudiantes de la materia Cálculo I de la Escuela de Ciencia y Tecnología (ECyT) de la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM). La materia es cuatrimestral y se cursa luego de una introducción al análisis matemático donde se estudia el concepto de derivada y sus aplicaciones. El programa de la materia Cálculo I es particular de la UNSAM y no encontramos un libro que permita a los estudiantes seguir adecuadamente los temas de nuestro programa. Es por eso que, a lo largo de los años que dictamos juntos la materia, fuimos redactando unos apuntes para los estudiantes de la materia Cálculo I, de los que luego surgió este libro.

Ante las diversas dificultades que enfrentan los estudiantes con la materia, fuimos desarrollando estrategias y propuestas pedagógicas para apoyarlos. Así, establecimos diferentes dispositivos para ayudarlos a apropiarse del conocimiento, a redactar sus propios textos, a trabajar en grupos y a leer material teórico. Bajo la convicción de que es fundamental fomentar la lectura de material teórico para desarrollar la independencia y las capacidades de los estudiantes y ofrecerles textos bien escritos sobre los que potenciar la producción propia, redactamos unos apuntes que fuimos puliendo a lo largo de los cuatrimestres hasta transformarse en estos cuadernos de cátedra. Estos contienen, además de los resultados teóricos fundamentales para la materia, varios ejercicios resueltos, redactados con cuidado, de forma que los estudiantes tengan material sobre el que basar sus propias producciones.

Otro de los dispositivos que implementamos y que dan resultados muy valiosos es la entrega semanal e individual de ejercicios, que son devueltos luego de ser cuidadosamente corregidos por docentes de la materia. Tanto la redacción de estos cuadernos de cátedra como la implementación del dispositivo mencionado fueron posible gracias a que contamos con un plantel docente ampliado en el marco del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza. Este programa fomenta la calidad en la enseñanza y la inclusión de los estudiantes con más dificultades y es sostenido por la ECyT.

Estos cuadernillos recogen experiencias de otros docentes de la UNSAM, incluyendo a Carlos Scirica, a Diana Rubio, a Julieta Molina, a León Braunstein, a Luciano Grippo y a María Inés Troparevsky, a quienes estamos muy agradecidos. En particular, los ejercicios de este libro tienen inspiración en diversas fuentes pero han sido principalmente elaborados por Diana y María Inés y modificados a lo largo de los cuatrimestres. Las correcciones fueron realizadas por León Braunstein sin embargo los errores que subsistan son exclusiva responsabilidad de los autores. Hoy, el apoyo editorial del programa UNSAM Edita nos permite mejorar estos cuadernillos y pasar al formato de libro. Estamos muy agradecidos con todos por acompañarnos en este proceso de crecimiento colectivo dentro de la UNSAM, una universidad única que en poco más de 25 años ha crecido con calidad en la enseñanza, inclusión social y una gran potencia transformadora de la realidad, habiendo logrado desde el conurbano bonaerense ser un referente internacional en docencia e investigación.

San Martín, 21 de febrero de 2020

Índice general

1. Integrales	1
1.1. El concepto de integral	1
Integración de funciones positivas y áreas	4
Integrabilidad	4
Propiedades de la integral	5
Ejercicios	7
1.2. Teorema fundamental del Cálculo	8
Función Integral	8
Dominio de una función integral general	11
Teorema Fundamental del Cálculo	13
Ejercicios	18
1.3. Regla de Barrow	21
Primitivas	21
Regla de Barrow	22

Valor medio de una función	25
Ejercicios	27
1.4. Técnicas de integración	29
Método de Integración por Sustitución	29
Método de Integración por Partes	35
Método de Integración por Fracciones Simples	39
Ejercicios	52
1.5. Aplicaciones: Longitudes, Áreas y Volúmenes	55
Área entre dos curvas	55
Longitud de arco	62
Volumen de un sólido de revolución	65
Ejercicios	68
1.6. Integración numérica	71
Método de los trapecios	71
Método de integración de Montecarlo	74
Ejercicios	75
1.7. Integrales impropias	75
Ejercicios	83
2. Ecuaciones diferenciales de primer orden	85
2.1. Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos	85
Ecuaciones directas	86
Problemas de valores iniciales	88
Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden	90

Modelos de crecimiento o decrecimiento exponencial	90
Ejercicios	93
2.2. Ecuaciones de variables separables	94
Ecuación logística	97
Resolución general de la ecuación logística	98
Ejercicios	102
2.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	103
Método de variación de constantes	106
Modelos que involucran ecuaciones de primer orden	112
Ejercicios	128
2.4. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales	130
Ejercicios	137
3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden	139
3.1. Ecuaciones homogéneas	140
El polinomio característico	142
Resolución de la ecuación homogénea	145
Modelo matemático del resorte	152
Ejercicios	153
3.2. Ecuaciones no homogéneas	154
Método de coeficientes indeterminados	156
Ejercicios	172
4. Aproximación local de funciones	175
4.1. Polinomio de Taylor	175

Ejercicios	183
4.2. Error de aproximación	185
Técnicas de acotación	185
Estimación del error al aproximar funciones	188
Ejercicios	203
5. Series	205
5.1. Sumas parciales y convergencia	205
Ejercicios	207
5.2. Series clásicas	207
Serie armónica	208
Series geométricas	209
Series telescópicas	212
Series p	214
Ejercicios	214
5.3. Propiedades de las series	215
Ejercicios	223
5.4. Criterios de convergencia por comparación	224
Criterio de comparación directa	224
Criterio de comparación por paso al límite	226
Criterio integral de Cauchy	228
Ejercicios	234
5.5. Series alternadas	235
Criterio de Leibniz	235

Ejercicios	240
5.6. Convergencia absoluta y convergencia condicional	240
Criterio de Cauchy	243
Criterio de D'Alembert	246
Ejercicios	249
5.7. Series de funciones	250
Series de potencias	252
Ejercicios	267
A. Resultados del cálculo diferencial	269
1.1. Trigonometría	269
Identidades trigonométricas	269
Tabla de valores de funciones trigonométricas	270
1.2. Sucesiones	270
Indeterminaciones	271
Subsucesiones	271
Criterios de convergencia de sucesiones	272
Límites especiales	272
Factorial	272
1.3. Límites de funciones	273
Límites especiales	273
1.4. Continuidad	273
1.5. Derivabilidad	274
Tabla de derivadas	274

Reglas de derivación	274
Algunos resultados importantes	275
1.6. Regla de L'Hôpital	275
1.7. Crecimiento, máximos y mínimos	276
Índice alfabético	279

Integrales

En este capítulo introducimos el concepto de integral y enunciamos el teorema fundamental del cálculo que relaciona integrales y derivadas. Luego presentamos las técnicas elementales para calcular integrales y damos algunas aplicaciones directas de estas técnicas a la solución de problemas geométricos relacionados con longitudes, áreas y volúmenes. Finalmente, introducimos un método numérico que nos permite aproximar el valor de una integral sin necesidad de realizar la integración analítica y terminaremos introduciendo el concepto de integral impropia.

1.1 El concepto de integral

El concepto de integral es uno de los conceptos fundamentales del cálculo y del análisis matemático. La integración es, en un sentido amplio, la operación inversa a la derivación y tiene una gran variedad de aplicaciones en las ramas de la ingeniería y de la ciencia. Se utiliza para resolver diversos problemas concretos relacionados por ejemplo con el cálculo de áreas y volúmenes y con la resolución de ecuaciones diferenciales. En este capítulo estudiaremos algunas técnicas elementales de integración y veremos sus aplicaciones más inmediatas.

La definición precisa de integral requiere de un tratamiento matemático que escapa al alcance de este curso. Más adelante daremos una definición, omitiendo los detalles técnicos asociados.

Comencemos resolviendo el problema de calcular el área bajo la curva de una función positiva y continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ver Figura 1.1.

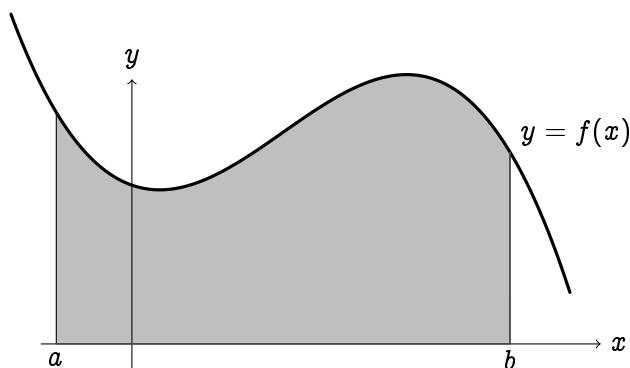
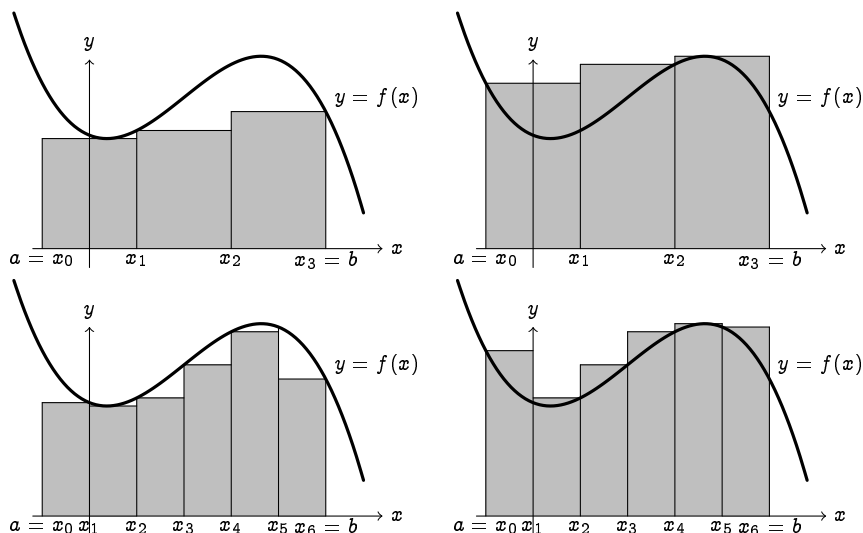


Figura 1.1: Área bajo una curva.

Aproximemos el área mediante sumas de áreas de rectángulos tanto por exceso como por defecto, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud y tomando el valor máximo y el mínimo de f alcanzado en cada uno de ellos (dichos máximos y mínimos existen por el Teorema de Weierstrass, ver Teorema 1.7.1), como se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2: Aproximaciones por defecto y exceso del área bajo una curva para diferentes particiones del intervalo $[a, b]$.

Notemos que al subdividir cada subintervalo, la aproximación por defecto aumenta y la aproximación por exceso disminuye. Ambas aproximaciones se acercan así al área que queremos calcular. La Figura 1.2 ilustra este fenómeno.

Si la función f no es continua, puede no alcanzar en cada subintervalo su máximo y su mínimo y volver imposible esta forma de aproximar el área bajo la curva. Tomemos entonces la siguiente definición más general, que involucra simplemente la elección de un punto cualquiera dentro del intervalo como se ve en la Figura 1.3.

Definición: Si f es una función definida en un intervalo $[a, b]$ y n es un entero positivo, consideremos la partición de $[a, b]$ en subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ determinada por los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

y escojamos un punto arbitrario ξ_i dentro de cada subintervalo ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$). Podemos calcular la suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

que depende no solo de la función f , sino también del n y de los puntos ξ_i escogidos.

Si el límite cuando n tiende a infinito de estas sumas resulta convergente a un mismo número para cualquier elección de los ξ_i decimos que la función f es *integrable* en el intervalo $[a, b]$ y definimos el valor de la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$ como ese límite y denotamos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

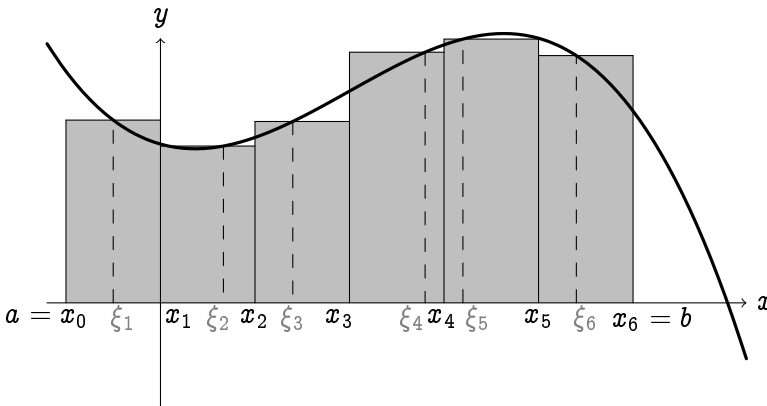


Figura 1.3: Aproximación del área bajo una curva usando puntos intermedios.

Si f es integrable en $[a, b]$ con $a < b$ extendemos la definición de integral de forma que

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Además, si a es un elemento del dominio de f , definimos

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Integración de funciones positivas y áreas

Si f es una función no negativa e integrable en un intervalo $[a, b]$, entonces la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

representa el área del conjunto de puntos $\{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ (ver Figura 1.1).

Integrabilidad

Cualquiera de las siguientes condiciones garantiza que una función f definida en todo un intervalo finito $[a, b]$ sea integrable en dicho intervalo:

- Si la función f es **continua** en $[a, b]$.
- Si f es monótona en $[a, b]$.
- Si f es integrable en un intervalo que contenga al intervalo $[a, b]$.
- Si la función f es acotada en $[a, b]$ y continua salvo en una cantidad finita de puntos.

Cualquiera de las siguientes condiciones alcanzan para que una función f **no** sea (propiamente) integrable en el intervalo $[a, b]$:

- La función f no está definida en algún punto $x \in [a, b]$.
- La función f no está acotada en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1.1.1: Cálculo de una integral como un área

Considerar la función $f(x) = 3x + 2$ y calcular $\int_0^2 f(x) dx$.

Resolución: Por el apartado anterior, la integral se corresponde con el área de la región comprendida entre las rectas $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = f(x)$. Esta región tiene forma de trapecio y se puede descomponer en un cuadrado y un triángulo con áreas 4 y 6 respectivamente. Ver Figura 1.4.

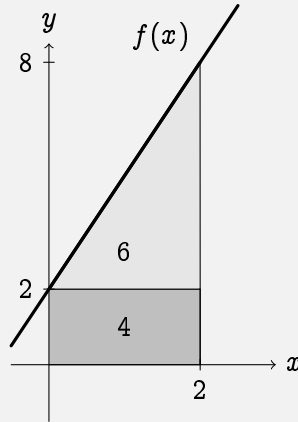


Figura 1.4: El área debajo de f se descompone en un cuadrado y un triángulo.

Concluimos que $\int_0^2 f(x) dx = 4 + 6 = 10$.

Propiedades de la integral

Propiedad sobre la linealidad de la integral (1.1.2): Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, también lo es $\alpha f + \beta g$ para cada par de constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Además

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Propiedad de aditividad respecto al intervalo de integración (1.1.3): Si existen dos de las tres integrales siguientes, entonces también existe la tercera y vale la igualdad:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Propiedad de la monotonía de la integral (1.1.4): Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Ejemplo 1.1.5: Propiedades de la integral

Si $\int_{-1}^2 f(x) dx = 5$, calcular el valor de $\int_{-1}^2 [2 - f(x)] dx$.

Resolución: Usando la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_{-1}^2 [2 - f(x)] dx = \int_{-1}^2 2 dx - \int_{-1}^2 f(x) dx.$$

Como 2 es una función no negativa, $\int_{-1}^2 2 dx = 3 \cdot 2 = 6$, de donde podemos concluir que

$$\int_{-1}^2 [2 - f(x)] dx = 6 - 5 = 1.$$

Ejemplo 1.1.6: Propiedades de la integral

Sabiendo que

$$\int_0^6 [2f(x) + 3g(x)] dx = 28, \quad \int_0^6 g(x) dx = 4 \quad \text{y} \quad \int_0^3 f(x) dx = 3$$

y utilizando las propiedades de la integral, calcular el valor de

$$\int_3^6 f(x) dx.$$

Resolución: Por la linealidad de la integral obtenemos que

$$\int_0^6 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_0^6 f(x) dx + 3 \int_0^6 g(x) dx$$

y por la aditividad respecto al intervalo de integración resulta que

$$\int_0^6 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \left[\int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx \right] + 3 \int_0^6 g(x) dx.$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y despejando la integral que queremos calcular tenemos la ecuación

$$\frac{\int_0^6 [2f(x) + 3g(x)] dx - 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^6 g(x) dx}{2} = \int_3^6 f(x) dx.$$

Finalmente, usando los datos tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{28 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4}{2} = \int_3^6 f(x) dx.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\int_3^6 f(x) dx = 5$.

Ejercicios

Ejercicio 1.1.1: Graficar f y calcular el área comprendida entre el gráfico de f y el eje x , para los siguientes casos

- $f(x) = 1$, $1 \leq x \leq 3$
- $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 3$
- $f(x) = 2x$, $-1 \leq x \leq 3$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \\ x + 1 & \text{si } 0 > x \end{cases}$, $-3 \leq x \leq 3$
- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 4 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$, $0 \leq x \leq 6$

Ejercicio 1.1.2: Calcular $\int_{-3}^5 f(x) dx$, sabiendo que $\int_{-3}^5 (f(x) - 2) dx = 9$.

Ejercicio 1.1.3: Calcular $\int_1^4 (f(x) + 3) dx$, sabiendo que $\int_1^4 f(x) dx = 7$.

Ejercicio 1.1.4: Calcular $\int_1^4 f(x) dx$, sabiendo que $\int_{-3}^4 (3f(x) - 4g(x)) dx = 23$, $\int_{-3}^4 g(x) dx = 7$ y que $\int_{-3}^1 f(x) dx = 12$.

Ejercicio 1.1.5: Calcular $\int_1^2 (f(x) + 2g(x)) dx$, sabiendo que $\int_1^2 2f(x) dx = 5$ y que $\int_1^2 g(x) dx = 7$.

1.2 La función integral y el Teorema Fundamental del Cálculo

Función Integral

Si f es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

entonces F resulta continua en (a, b) y lateralmente continua en los extremos a y b .

Observación: La continuidad de F vale incluso si f no es continua.

Ejemplo 1.2.1: Función discontinua y su integral

Calcular la fórmula de la función integral $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ si

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Analizar la continuidad y derivabilidad de F .

Resolución: Observemos que f es una función no negativa, entonces obtener $F(x)$ es equivalente a calcular distintas áreas que dependen del valor de x .

Comencemos con $0 \leq x \leq 1$. Podemos ver en el gráfico siguiente que el área por calcular es la del rectángulo de base x y altura 1, por lo tanto, en este caso $F(x) = \int_0^x f(t) dt = x$ (ver Figura 1.5).

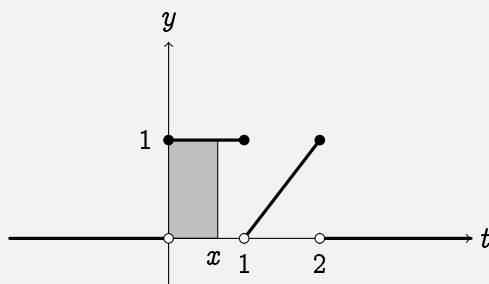


Figura 1.5: Función integral para $0 \leq x \leq 1$

Si hacemos lo mismo pero para $1 < x \leq 2$, al área del cuadrado de lado 1 debemos sumarle el área del triángulo rectángulo de base y altura $x - 1$. Entonces podemos afirmar que

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} \quad (\text{ver Figura 1.6}).$$

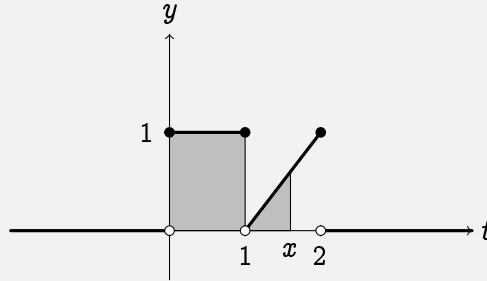


Figura 1.6: Función integral para $1 < x \leq 2$.

Como f es nula a partir de 2, si $x \geq 2$ tenemos que

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt = 1 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

Si queremos calcular la función integral $F(x)$ para $x < 0$, resulta conveniente invertir los límites de integración y usar que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Así obtenemos que

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt = 0.$$

Luego la función buscada es

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{(x-1)^2}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En la Figura 1.7 están representadas las funciones f y F en el intervalo $[0, 2]$, notemos que si bien f no es continua en 1, su integral F sí lo es.

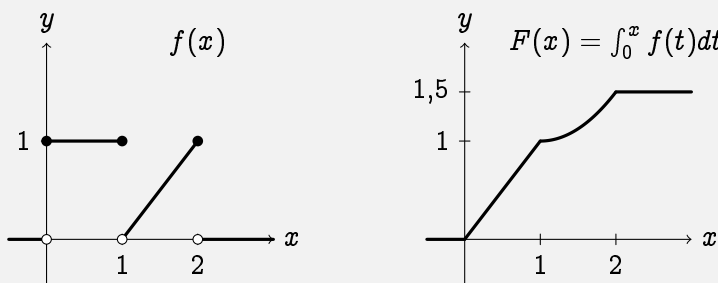


Figura 1.7: Función f y su función integral.

Veamos, por definición, que $F(x)$ no es derivable en $x = 1$, mostrando que los límites laterales del cociente incremental son distintos:

Por izquierda tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1.$$

Por derecha el límite resulta ser

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{h^2}{2} - 1}{h} = 0.$$

Queda en manos del lector probar que F no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

Ejemplo 1.2.2: Dominio de una función integral

Determinar el dominio de la función $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$.

Resolución: Aunque aún no sabemos integrar esta función, podemos preguntarnos dónde estará definida.

La función $\sqrt{t}$ es continua en el intervalo $[0, x]$, si $x \geq 0$ y no está definida para valores negativos de t . Por lo tanto la función F estará

bien definida solo cuando ambos extremos de integración sean mayores o iguales que cero, esto ocurre si y solo si $x \geq 0$. Por lo tanto, podemos concluir que $\text{Dom}(F) = [0, +\infty)$.

Dominio de una función integral general

Sean $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ funciones y sea F la función definida por

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt.$$

Para que un punto x_0 esté en el $\text{dom}(F)$ es necesario y suficiente que

- $a(x)$ y $b(x)$ estén definidas en x_0 , y
- f sea integrable en el intervalo de extremos $a(x_0)$ y $b(x_0)$, a dicho intervalo lo notaremos informalmente $[a(x_0), b(x_0)]$ sin importar cuál de los extremos es mayor.

Observación: Notemos que la función $F(x)$ puede obtenerse como resta de las composiciones de la función integral $G(x) = \int_c^x f(t) dt$ con las funciones $a(x)$ y $b(x)$, escribiéndola de una manera adecuada. Para ello, recordemos que por la propiedad de inversión de los límites de integración son verdaderas las igualdades

$$-G(x) = -\int_c^x f(t) dt = \int_x^c f(t) dt.$$

Si tomamos c arbitrario de manera que f resulte integrable en los intervalos dados por los límites de integración y usamos la propiedad de aditividad respecto del intervalo de integración, podemos escribir la función integral $F(x)$ de la siguiente manera

$$F(x) = \int_c^{b(x)} f(t) dt - \int_c^{a(x)} f(t) dt = G(b(x)) - G(a(x)).$$

Ejemplo 1.2.3: Dominio de una función integral general

Determinar el dominio de la función $F(x) = \int_0^{x^2-1} \sqrt{t} dt$.

Resolución: La función $\sqrt{t}$ es continua en el intervalo $[0, +\infty)$ y no está definida para valores negativos de t . Por lo tanto la función F

estará bien definida solo cuando ambos extremos de integración sean mayores o iguales que cero, esto ocurre si y solo si $|x| \geq 1$. Por lo tanto, podemos concluir que $\text{Dom}(F) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Ejemplo 1.2.4: Dominio de una función integral general

Hallar el dominio de la función $F(x) = \int_{\log_2(x+7)}^{x+3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2+6} dt$.

Resolución: Nuestro objetivo es encontrar todos los valores de x para los cuales la integral existe. Para facilitarnos la escritura llamemos $f(t) = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2+6}$ a la función del integrando.

Recordemos que una de las condiciones suficientes para que f resulte integrable en un intervalo cerrado y acotado es que sea continua en dicho intervalo. Estudiemos primero su dominio natural para poder dar los valores en los cuales f es continua. Resolviendo la inecuación $t^2 - 1 \geq 0$, obtenemos que el dominio de f es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Por ser f cociente de funciones continuas con denominador no nulo, podemos afirmar que f es continua en dicho conjunto. Luego f resulta integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido dentro del conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Sin pérdida de generalidad podríamos escribir más informalmente que buscamos x de manera que valga lo siguiente:

$$[\log_2(x+7), x+3] \subseteq (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Para que lo escrito arriba tenga sentido, deben estar definidas las funciones de los extremos del intervalo, lo que implica que, para que $\log_2(x+7)$ esté definido, $x > -7$. Además, para que el intervalo esté contenido en el dominio de f , debe ocurrir que

$$[\log_2(x+7), x+3] \subseteq (-\infty, -1] \quad \text{ó} \quad [\log_2(x+7), x+3] \subseteq [1, +\infty).$$

Entonces x debe cumplir que $\log_2(x+7) \leq -1$ y a la vez $x+3 \leq -1$, o bien $\log_2(x+7) \geq 1$ y $x+3 \geq 1$ para que $F(x)$ esté definida. Haciendo las cuentas, tenemos que $x \leq -\frac{13}{2}$ y $x \leq -4$, o bien $x \geq -5$

y $x \geq -2$. Intersecando los conjuntos, podemos concluir que $x \leq -\frac{13}{2}$ o bien $x \geq -2$, y no debemos olvidar que además se debe cumplir que $x > -7$. Finalmente, hallamos todas las condiciones para que x pertenezca al dominio de $F(x)$ y podemos afirmar que

$$\text{Dom}(F) = (-7, -13/2] \cup [-2, +\infty).$$

Teorema Fundamental del Cálculo

El siguiente teorema es de gran importancia, relaciona dos conceptos fundamentales del análisis matemático, en principio, completamente aislados, la derivada y la integral de una función. Además, nos brinda una herramienta para poder sistematizar el cálculo de integrales.

Teorema Fundamental del Cálculo (1.2.5): Sean una función integrable f en un intervalo $[a, b]$, $c \in [a, b]$ y la función integral

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

Si f es continua en $x \in (a, b)$, entonces $F(x)$ es derivable en x y su derivada es igual a f :

$$F'(x) = f(x)$$

Demostración: Relajaremos un poco las hipótesis del teorema para poder dar una demostración acorde al curso. Pediremos como hipótesis que f sea continua en un intervalo alrededor de $x \in [a, b]$, en vez de que la función f sea continua en el punto x ,

Debemos probar, con el límite del cociente incremental, que F es derivable en x y que $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Para mostrar que este límite existe, lo acotaremos por abajo y por arriba por dos límites que convergen a $f(x)$ y luego por la propiedad del Sandwich (ver Proposición 1.2.2) concluiremos la demostración.

Sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $h > 0$, pues el caso $h < 0$ es análogo. Como supusimos, la función f es continua en un entorno de x . Luego tomando h suficientemente pequeño $f(t)$ es continua en el intervalo $[x, x + h]$. Por el Teorema de Weierstrass (ver Teorema 1.7.1), la función f alcanza su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[x, x + h]$ que podemos llamar $M(h)$ y $m(h)$ respectivamente.

Luego tenemos $m(h) \leq f(t) \leq M(h)$ para todo $t \in [x, x + h]$ y por la monotonía de la integral se deduce que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} m(h) dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} M(h) dt$$

Para calcular la primera y la tercera integral, recordemos que la integral de una función constante es la constante por la longitud del intervalo, por lo tanto

$$\int_x^{x+h} m(h) dt = h m(h) \text{ y } \int_x^{x+h} M(h) dt = h M(h).$$

Si lo reemplazamos en las desigualdades anteriores, obtenemos

$$m(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M(h).$$

Observemos que, como la función f es continua, $\lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = f(x)$ y $\lim_{h \rightarrow 0^+} M(h) = f(x)$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x).$$

Haciendo las mismas cuentas para $h < 0$ se deduce que F es derivable en x y que $F'(x) = f(x)$ como deseábamos. $\square$

Ejemplo 1.2.6: Análisis conceptual de una función integral

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente, tal que $g(0) = 0$. Probar que $F(x) = \int_0^x g(t) dt$ tiene un único extremo y que es un mínimo global.

Resolución: Como g es continua en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo (ver Teorema 1.2.5) a la función F y concluir que es derivable en toda la recta real y que su derivada es la función g . Como F es continua, solo puede tener un extremo en un punto crítico.

Al analizar los ceros de $F' = g$, observamos que puede tener a lo sumo un cero ya que es estrictamente creciente. Por lo tanto, el único punto crítico de F es el cero de la función g , en 0.

Como $g(x)$ es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$, concluimos que F es decreciente en $\mathbb{R}_{<0}$ y creciente en $\mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, F tiene un mínimo global en 0.

Ejemplo 1.2.7: Análisis de una función integral

Dar los extremos de la función dada por $F(x) = \int_3^x \ln(t^2 - 3) dt$.

Resolución: Para poder buscar los extremos, primero debemos indicar el dominio de la función. Para ello estudiemos primero el dominio del integrando $f(t) = \ln(t^2 - 3)$. Si resolvemos la inecuación $t^2 - 3 > 0$, obtenemos que $\text{Dom}(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Como f es continua en su dominio, resulta integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $\text{Dom}(f)$. Luego, para que F esté definida en x , es necesario y suficiente que el intervalo cerrado y acotado de extremos 3 y x esté contenido en el dominio de f . En símbolos, podemos escribir

$$[3, x] \subseteq (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

Los extremos 3 y x deben pertenecer a $(-\infty, -\sqrt{3})$ o bien a $(\sqrt{3}, +\infty)$. Pero como $3 \notin (-\infty, -\sqrt{3})$ y $3 \in (\sqrt{3}, +\infty)$, entonces $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. Por lo tanto, $\text{Dom}(F) = (\sqrt{3}, +\infty)$.

Finalmente para encontrar los extremos relativos de F trabajemos con su derivada. Recordemos que es el Teorema Fundamental del Cálculo (ver Teorema 1.2.5) el que afirma que podemos derivar una función integral alrededor de x si la función del integrando es continua en x . Como $f(t) = \ln(t^2 - 3)$ es integrable en el intervalo $[3, x]$ y f es continua en x para $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, concluimos que F es derivable en $(\sqrt{3}, +\infty)$ y su derivada es

$$F'(x) = f(x) = \ln(x^2 - 3).$$

Como solo uno de los ceros de f está en el $\text{Dom}(F)$, entonces el único punto crítico de F es 2. Para decidir si es un extremo miremos el signo de la derivada:

x	$(\sqrt{3}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$F'(x)$	—	0	+
$F(x)$	$\searrow$	mín local	$\nearrow$

Podemos concluir que la función $F(x)$ decrece en $(\sqrt{3}, 2)$, alcanza el valor mínimo en 2 y crece en $(2, +\infty)$. Observemos que el mínimo de F es absoluto.

Teorema Fundamental del Cálculo Generalizado (1.2.8): Sean $a(x)$ y $b(x)$ funciones derivables en x_0 y f una función integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $a(x_0)$ y $b(x_0)$ pertenezcan al intervalo (a, b) . Si f es continua en $a(x_0)$ y en $b(x_0)$, entonces la función definida por

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

resulta derivable en x_0 y cumple

$$F'(x_0) = f(b(x_0))b'(x_0) - f(a(x_0))a'(x_0).$$

Demostración: Como hemos visto anteriormente, podemos escribir a $F(x)$ como resta y composición de las funciones $G(x) = \int_c^x f(t) dt$ donde $c \in (a, b)$, $a(x)$ y $b(x)$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \int_c^{b(x)} f(t) dt - \int_c^{a(x)} f(t) dt = G(b(x)) - G(a(x)).$$

Si usamos las reglas de derivación, tenemos que

$$F'(x_0) = G'(b(x_0)) \cdot b'(x_0) - G'(a(x_0)) \cdot a'(x_0).$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo (ver Teorema 1.2.5), $G(x)$ es derivable en $a(x_0)$ y en $b(x_0)$ y su derivada cumple que $G'(a(x_0)) = f(a(x_0))$ y $G'(b(x_0)) = f(b(x_0))$. Luego obtenemos que

$$F'(x_0) = f(b(x_0))b'(x_0) - f(a(x_0))a'(x_0).$$

□

Ejemplo 1.2.9: Análisis de una función integral

Considerar las funciones $g(t) = \sqrt{t}$ y $F(x) = \int_1^{\ln(x)} g(t) dt$.

1. Hallar el dominio de $F(x)$.
2. Probar que $F(x)$ tiene un único cero en su dominio.

Resolución:

1. Como g es continua en su dominio, el cual es $[0, +\infty)$, la función g resulta integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $[0, +\infty)$. Para que un punto x pertenezca al dominio de F , es necesario y suficiente que $\ln(x)$ esté definida y que el intervalo $[1, \ln(x)]$ esté contenido en el dominio de g . La primera condición implica que $x > 0$. La segunda, que $\ln(x) \geq 0$, es decir que $x \geq 1$. Concluimos que el dominio de F es el conjunto $[1, +\infty)$.
2. Primero veamos que F es creciente mediante el cálculo de su derivada. Como $g(t)$ es continua tanto en $t = 1$ como en $t = \ln(x)$ para todo $x \in [1, +\infty)$, según el Teorema Fundamental del Cálculo Generalizado (ver Teorema 1.2.8), la derivada de F está dada por

$$F'(x) = \sqrt{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' - \sqrt{1} \cdot 1' = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}.$$

Además como $\sqrt{\ln(x)} > 0$ y $x > 0$ si $x \in (1, +\infty)$, podemos afirmar que F' es positiva en su dominio y, por lo tanto, que F es una función estrictamente creciente. Entonces o bien F no tiene ceros o bien F tiene solamente un cero.

Para probar que F tiene un cero recordemos la siguiente propiedad de la integral

$$\int_a^a f(t) dt = 0.$$

Entonces, podemos probar si en algún valor de x los límites de integración coinciden. Es decir resolver la ecuación $\ln(x) = 1$, que

da como resultado $x = e$. Luego vale que

$$F(e) = \int_1^{\ln(e)} \sqrt{t} \, dt = \int_1^1 \sqrt{t} \, dt = 0.$$

Por lo tanto, como F tiene a lo sumo un cero y al menos un cero, concluimos que F tiene exactamente un cero.

Ejercicios

Ejercicio 1.2.1: Hallar una fórmula explícita para $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ y probar que es una función continua, siendo

$$\text{a. } f(t) = t \qquad \text{b. } f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \leq 0 \\ t + 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.2.2: Considerar las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

a. Probar que f no es continua en $x = 2$ pero que $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ si lo es.

b. ¿Es $F'(x) = f(x)$?

c. ¿Es g derivable en todo el intervalo $(0,4)$? Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, ¿es $G(x)$ derivable?

Ejercicio 1.2.3: Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a. } F(x) = \int_x^{x^5} \sqrt[5]{\sin(t^3)} e^{-t^2} dt.$$

$$\text{d. } F(x) = \int_1^{\sqrt{16-x^2}} \frac{\ln(y)}{2+y^3} dy.$$

$$\text{b. } F(x) = \int_1^{\ln(x)} e^{-t^2} dt.$$

$$\text{e. } F(x) = \int_1^{\log_2(x-3)} \frac{\sin(y)}{2+\sqrt{1-y}} dy.$$

$$\text{c. } F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+u}}{e^{u^2}} du.$$

$$\text{f. } F(x) = \int_{\sqrt{4-x}}^{\frac{(x+3)^3}{8}} \frac{\ln(t^2-1)}{1+t^6} dt.$$

$$g. F(x) = \int_4^{\operatorname{sen}(x)} \frac{\ln(t^2 + 9)}{e^{-t^6}} dt.$$

$$i. F(x) = \int_{2x-8}^{\sqrt[3]{x}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(y) dy}{\sqrt{y^2 - 2y + 9}}.$$

$$h. F(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \frac{y dy}{\ln^2(y^2 - 1) + 5}.$$

Ejercicio 1.2.4: Calcular las derivadas con respecto a x de las siguientes funciones en los dominios indicados:

$$a. \int_1^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$d. \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt, \quad x > 0.$$

$$b. \int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen}(u)}{1+u} du, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

$$e. \int_{\ln(x)}^{x^3} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1+t^2} dt, \quad x > 0.$$

$$c. \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{y}{2+y^3} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f. \int_x^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt, \quad x > 0.$$

Ejercicio 1.2.5: Calcular $g(2)$ sabiendo que g es una función continua para todo $x \geq 0$ y satisface

$$\int_0^{x^2} g(t) dt = x^2(1+x^4).$$

Ejercicio 1.2.6: Mostrar que la siguiente función es creciente en su dominio, $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Ejercicio 1.2.7: Hallar dominio, intervalos de crecimiento y extremos locales de las siguientes funciones:

$$a. F(x) = \int_0^x e^{-t^2} t^2 (t-1)(t-4) dt.$$

$$b. G(x) = \int_1^{e^{x-3}} [\ln^2(t) - 2 \ln(t)] dt.$$

$$c. H(x) = \int_1^{\sqrt{x}} [e^{7-t^2} - e^{t^2+1}] dt.$$

d. $I(x) = \int_e^{x^2+e} \frac{1}{\ln(s)} ds.$

Ejercicio 1.2.8: Mostrar que la función $F(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x_0 = 0$, siendo

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{\operatorname{sen}(t) + 2} dt.$$

Decidir si $-1 \in \operatorname{Im}(F)$.

Ejercicio 1.2.9: Mostrar que la función h tiene **exactamente un cero**, donde $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{e^t}{t^2 + 1} dt.$$

Ejercicio 1.2.10: Probar que la siguiente expresión es constante, es decir, no depende de x , si $x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Ejercicio 1.2.11: Dar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = 0$, al gráfico de

$$h(x) = 6x^2 + 3 + \int_1^{e^{-x}} \frac{\sqrt{t^2 + 8}}{\ln^2(t) + 2} dt.$$

Ejercicio 1.2.12: Demostrar que la siguiente expresión resulta constante y encontrar el valor de dicha constante

$$\int_{-x^3}^{x^3} t \cos(t^5) dt.$$

Ejercicio 1.2.13: Hallar el conjunto de positividad de

$$F(x) = \int_1^{\ln(x)} e^{-t^2} dt.$$

Ejercicio 1.2.14: Sabiendo que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, probar que la función $G(x)$ tiene un punto crítico en $x = 1$ y decidir si es máximo o mínimo

$$G(x) = \int_1^{(x-1)^2} e^{f(t)} dt.$$

1.3 Regla de Barrow

La Regla de Barrow es un corolario inmediato del Teorema Fundamental del Cálculo. Antes de enunciarlo, necesitamos dar algunas definiciones.

Primitivas

Definición: Una *primitiva* de una función f en un intervalo (a, b) es una función F que satisface

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Observación: Las primitivas no son únicas, pero dos primitivas solo pueden diferir en una constante. Pues si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$ en un intervalo abierto, entonces

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Como las únicas funciones que tienen derivada nula son las constantes (ver en el apéndice la Proposición 1.7.3), concluimos que existe un $C \in \mathbb{R}$ que cumple

$$G(x) - F(x) = C,$$

lo que implica

$$G(x) = F(x) + C.$$

Definición: Llamamos *integral indefinida* al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ en un intervalo abierto dado y notamos:

$$\int f(x) dx.$$

Observación: Por el Teorema Fundamental del Cálculo, si f es una función continua en $[a, b]$, entonces la función $\int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de f en (a, b) .

De la definición de primitiva y de la tabla de derivadas podemos deducir fácilmente la siguiente tabla de primitivas:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\text{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\text{sen}(x) + C$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$

Regla de Barrow

Regla de Barrow (1.3.1): Si $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de f , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demostración: Consideremos la función $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ que cumple que $G(a) = 0$ y $G(b) = \int_a^b f(x) dx$.

Como G y F son dos primitivas de f existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$. Luego $G(a) = F(a) + C$ y, por lo tanto, $C = -F(a)$. Podemos concluir que

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

□

Observación: Si usamos la notación $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, podemos escribir la regla de Barrow como sigue

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Vimos anteriormente que el problema de calcular el área entre una curva y el eje x puede reducirse al cálculo de una integral adecuada. La regla de Barrow nos da una forma concreta de calcular la integral resultante. Es decir, de asignarle un número al área buscada.

El problema de calcular el área de una figura curva es típicamente un problema difícil y el interés en resolverlo tiene una larga historia. Los antiguos griegos lo llamaban el problema de la cuadratura de una figura, ya que como problema geométrico es equivalente a encontrar un cuadrado de la misma área que la figura estudiada. Así, por ejemplo la cuadratura del círculo fue un problema abierto por muchísimos años. El primero en resolver la cuadratura de un segmento parabólico, es decir, en calcular el área encerrada entre una parábola y una recta, fue *Arquímedes de Siracusa*. Para esto desarrolló un método novedoso (ver Authier 1991), que puede verse como un anticipo del cálculo integral que estamos estudiando. El siguiente ejemplo muestra que, con lo que estudiamos hasta aquí, algunos de estos famosos problemas pueden resolverse sencillamente.

Ejemplo 1.3.2: Integrales inmediatas

Calcular las siguientes integrales.

$$1. \int_{-1}^1 1 - x^2 dx.$$

$$3. \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx.$$

$$2. \int_0^1 e^x dx.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x) dx.$$

Resolución: Como las funciones a integrar son continuas, podemos aplicar la regla de Barrow.

Es interesante observar que en los primeros tres ejemplos, las funciones son positivas en el intervalo de integración por lo que el valor de la integral en cada caso resulta igual al área encerrada entre el gráfico de la función y el eje x . En el último caso la función toma valores positivos y negativos y las áreas encerradas se cancelan mutuamente, lo que da lugar a un valor nulo de la integral.

$$1. \int_{-1}^1 1 - x^2 \, dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

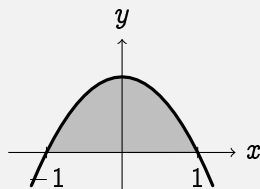


Figura 1.8: Región encerrada por el gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ y el eje x .

$$2. \int_0^1 e^x \, dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

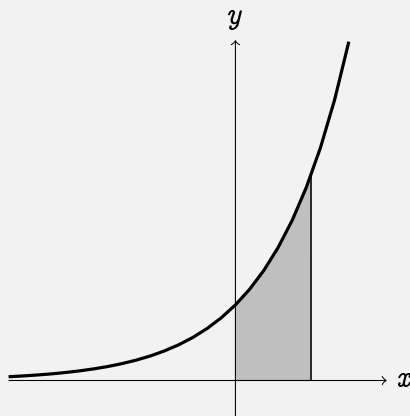


Figura 1.9: Región encerrada por el gráfico de $f(x) = e^x$ y el eje x para $0 \leq x \leq 1$.

$$3. \int_0^\pi \text{sen}(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 - (-1) = 2.$$

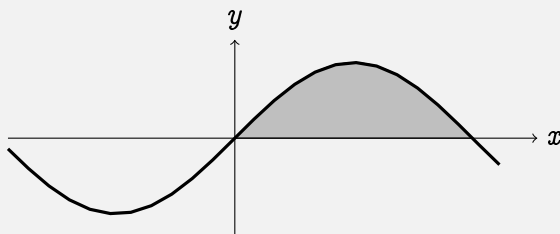


Figura 1.10: Región encerrada por el gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ y el eje x para $0 \leq x \leq \pi$.

$$4. \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 - (-1) = 0.$$

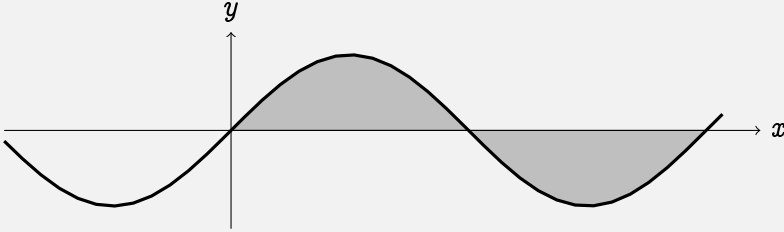


Figura 1.11: Región encerrada por el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y el eje x para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Valor medio de una función

Definición: Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos el *valor medio* de f mediante la fórmula

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Intentaremos convencernos de que esta definición es similar al promedio de un conjunto finito.

Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

El promedio de los valores de f en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ es:

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{1}{n}.$$

Si multiplicamos y dividimos por $b-a$ tenemos:

$$\frac{1}{b-a} \left(f(x_1) \frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_n) \frac{b-a}{n} \right) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n},$$

y si tomamos límite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Deducimos del Teorema del Valor Medio de Langrange (ver en el apéndice el Teorema 1.5.5) el siguiente teorema:

Teorema del valor medio integral (1.3.3): Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que cumple

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a).$$

Demostración: Consideremos la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Como la función $f(t)$ es continua en x para todo $x \in [a, b]$, por el Teorema Fundamental del Cálculo (ver Teorema 1.2.5), $F(x)$ es derivable en $x \in (a, b)$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

El Teorema de valor medio de Lagrange para $F(x)$ afirma que existe $c \in (a, b)$ que cumple que

$$\frac{1}{b-a}(F(b) - F(a)) = F'(c).$$

Como $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(t) dt$ y $F'(c) = f(c)$, reemplazando en la ecuación anterior obtenemos el resultado deseado. $\square$

Ejemplo 1.3.4: Valor medio

Calcular el valor medio de x^2 en el intervalo $[0, 3]$ y hallar el punto $c \in (0, 3)$ cuya existencia garantiza el Teorema 1.3.3

Resolución: Para resolver el ejercicio debemos calcular

$$VM = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx.$$

Como x^2 es continua en $[0, 3]$ podemos usar la regla de Barrow. Una primitiva para x^2 es $\frac{x^3}{3}$.

Luego, la respuesta es

$$VM = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{27}{9} = 3.$$

El punto c solicitado cumple que $\int_0^3 t^2 dt = c^2(3 - 0)$. Despejando, obtenemos que $c^2 = \frac{9}{3} = 3$. Luego, como $c \in (0, 3)$, concluimos que $c = \sqrt{3}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.3.1: Hallar una primitiva f para cada función g . Dar los dominios de f y g .

a. $g(x) = -2$.

d. $g(x) = \sqrt{x}(2x + \sqrt{x})$.

b. $g(x) = -5x + 3\sqrt{x} - 2$.

e. $g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

c. $g(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-\frac{2}{3}}$.

f. $g(x) = \operatorname{sen}(x) - 3\cos(x) + e^x$.

Ejercicio 1.3.2: Calcular

a. $\int_0^3 3(x - 2) dx$.

d. $\int_{\pi}^{5\pi} \operatorname{sen}(x) - \cos(x) dx$.

b. $\int_{-2}^2 (x^3 + 2x) dx$.

e. $\int_0^3 \frac{2e^t + t}{3} dt$.

c. $\int_0^x \cos(t) dt$.

f. $\int_1^3 \sqrt{x} + 2x^3 - x^{-1} dx$.

Ejercicio 1.3.3: Calcular las siguientes integrales definidas separando en términos cuando sea conveniente

a. $\int_1^x t^r dt, \quad r \neq -1$.

c. $\int_x^2 \frac{t - 3}{t + 2} dt$.

b. $\int_{\pi/2}^x \operatorname{sen}(t) dt$.

d. $\int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2 + 2t} dt$.

Ejercicio 1.3.4: En cada caso encontrar el valor medio de f en el intervalo indicado

a. $f(x) = 4 - x^2$, $[-2, 2]$. c. $f(x) = \text{sen}(x)$, $[0, \pi]$.

b. $f(x) = \frac{4(x^2 + 1)}{x^2}$, $[1, 3]$. d. $f(x) = \cos(x)$, $[0, \pi/2]$.

Ejercicio 1.3.5: El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima a $V(t) = 0,1729t + 0,1522t^2 - 0,0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

Ejercicio 1.3.6: Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta que $y = y(x)$ es una función y analizar el intervalo de validez de la solución.

a. $y'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x}}$ c. $y'(x) - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} = 0$

b. $y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ d. $e^x - y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ejercicio 1.3.7: Hallar una función $y(x)$ que cumpla:

a. $\begin{cases} y'(x) = 3x \\ y(0) = 7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y'(x) = x^3 \\ y(1) = -5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} y'(\theta) = -\cos(\theta) \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases}$

Ejercicio 1.3.8: Plantear y resolver los siguientes problemas. *Recordar que si la posición de un móvil en el instante t está determinada por la función $x(t)$, la velocidad y la aceleración instantáneas resultan $v(t) = x'(t)$ y $a(t) = x''(t)$ respectivamente.*

- La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 12\text{m/seg}^2$, se expresa por la fórmula $v(t) = 12 - 10t$ donde t es el tiempo transcurrido en segundos. Si fue lanzado desde el suelo, ¿a qué distancia de la posición inicial se encontrará este cuerpo a los t segundos de haber sido lanzado?
- Un móvil se desplaza por un camino. Se sabe que la velocidad en el instante t viene dada por $v(t) = t(t - 100)\text{km/h}$. Si en el instante inicial $t = 0$ el móvil se encuentra a 30 km del punto de medición, ¿cuál es la posición $s(t)$ para $0 \leq t \leq 100$?
- Un cohete está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración

$a(t) = \sqrt{t} + 1$ para todo $t \geq 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/seg². ¿Qué velocidad tiene en el instante $t = 64$ seg? ¿A qué distancia está del punto de partida en ese instante?

1.4 Técnicas de integración

Como hemos visto en el último ejemplo de la sección anterior, para calcular integrales debemos encontrar primitivas. Veremos a continuación algunas técnicas para hallarlas.

Método de Integración por Sustitución

El *método de integración por sustitución* consiste en realizar un reemplazo de variables adecuado que permita transformar el integrando en una expresión con una integral más sencilla. En algún sentido, este método hace lo opuesto que la regla de la cadena en la derivación (ver en el Apéndice, regla de la cadena 1.5.4).

Supongamos que tenemos una función g con derivada continua en un intervalo abierto que contiene a los puntos a y b y supongamos que f es una función continua en un intervalo que contiene a la imagen de g . Para calcular la integral

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

realizamos un cambio de variables. Tomamos $z = g(x)$ y usamos la convención $dz = g'(x) dx$ obteniendo la integral

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz.$$

Veamos que es lo mismo calcular esta última integral que la anterior. Por la regla de Barrow si F es una primitiva de f (es decir $F'(x) = f(x)$), tenemos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado, si usamos la regla de la cadena para calcular la derivada de $F \circ g$, obtenemos

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

lo que prueba que $(F \circ g)(x)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Entonces, usando nuevamente la regla de Barrow, obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a).$$

Resumiendo, el método de integración por sustitución consiste en realizar el siguiente cambio de variables

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz,$$

si $z = g(x)$ y $dz = g'(x) dx$.

De manera análoga, trabajando con integrales indefinidas tenemos:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(z) dz,$$

si $z = g(x)$ y $dz = g'(x) dx$.

Ejemplo 1.4.1: Sustitución

Calcular las siguientes integrales utilizando el método de sustitución:

1. $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx.$

4. $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx.$

2. $\int_0^1 e^{-x} dx.$

5. $\int \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 3} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) dx.$

Resolución:

1. Para poder calcular la integral usando el método debemos identificar en el integrando una composición de funciones. Llamemos $f(x) = x^2$ y $g(x) = \ln(x)$. Luego $f(g(x)) = \ln^2(x)$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Si sustituimos $z = \ln(x)$, obtenemos $dz = \frac{1}{x} dx$ y

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \int \ln^2(x) \frac{1}{x} dx = \int z^2 dz.$$

Usando la tabla de primitivas resulta

$$\int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C.$$

Una vez resuelta la integral, podemos volver a hacer (en la otra dirección) el cambio de variable. Recordando que $z = \ln(x)$, podemos reescribir la igualdad anterior como sigue

$$\frac{z^3}{3} + C = \frac{\ln^3(x)}{3} + C.$$

Entonces, encontramos el resultado de la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \frac{\ln^3(x)}{3} + C.$$

2. En este ejercicio debemos calcular la integral definida

$$\int_0^1 e^{-x} dx.$$

Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x$. Si bien en el integrando no se encuentra la derivada $g'(x) = -1$, por la linealidad de la integral vale

$$\int_0^1 e^{-x} dx = - \int_0^1 e^{-x} (-1) dx.$$

Si tomamos la sustitución $z = -x$, entonces $dz = -1 dx$ y

$$- \int_0^1 e^{-x} (-1) dx = - \int_{-0}^{-1} e^z dz = -e^z \Big|_0^{-1} = -(e^{-1} - e^0) = 1 - \frac{1}{e}.$$

Concluimos que $\int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$.

3. Antes de usar el método de sustitución para calcular la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) dx,$$

reescribimos el integrando usando una identidad trigonométrica y luego la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx.\end{aligned}$$

Para calcular la integral del primer término usamos la tabla de primitivas y para el segundo sustituimos $z = 2x$, y obtenemos $dz = 2 dx$ que equivale a $\frac{1}{2} dz = dx$. Luego podemos afirmar que vale

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_{2 \cdot 0}^{2 \cdot \frac{\pi}{4}} \cos(z) \frac{1}{2} dz.$$

Haciendo las cuentas, usando la linealidad de la integral y la tabla de primitivas obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_{2 \cdot 0}^{2 \cdot \frac{\pi}{4}} \cos(z) \frac{1}{2} dz &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z) dz = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(z) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{sen}(0) \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral pedida es $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

4. Del mismo modo que en el ejemplo del punto anterior, para calcular

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$$

tendremos que reescribir la función a integrar antes de aplicar el método. Observemos que el denominador nunca se anula, pues la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene solución en los números reales.

En los casos en lo que se tiene una cuadrática sin raíces reales en el denominador y una constante en el numerador del integrando, haremos un cambio de variables para que la función quede expresada como un múltiplo de $\frac{1}{z^2 + 1}$ (que se integra por tabla). Con

este fin recordemos que una cuadrática puede escribirse de varias formas, una de ellas es la forma canónica (en la cual se explicitan las coordenadas del vértice):

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

donde $(x_v; y_v)$ son las coordenadas del vértice de la parábola.

Si la cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$, entonces el vértice se puede obtener a partir los coeficientes de la manera siguiente:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = ax_v^2 + bx_v + c.$$

La forma canónica de la cuadrática del denominador de la función del integrando es

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4.$$

Acomodando un poco más la cuadrática, llegamos a lo buscado:

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 = 4 \left[\frac{(x - 1)^2}{4} + 1 \right] = 4 \left[\left(\frac{x - 1}{2} \right)^2 + 1 \right].$$

Entonces vale la igualdad

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{4 \left[\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + 1} dx.$$

Estamos ahora en condiciones de realizar la sustitución $z = \frac{x-1}{2}$, lo que implica $dz = \frac{1}{2} dx$, o equivalentemente, $2 dz = dx$. Luego,

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{z^2 + 1} 2 dz = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz.$$

Finalmente, usando la tabla de primitivas obtenemos

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2} \arctg(z) + C = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

En conclusión, hemos obtenido que

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C.$$

5. En este ejemplo debemos calcular la integral indefinida

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 3} dx.$$

Cuando nos encontramos con funciones racionales en el integrando debemos observar los grados de los polinomios que intervienen. Si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual al del denominador, nos será útil usar el algoritmo de la división para simplificar el cociente. En este caso es muy sencillo notar que $x^2 + x - 3 = (x^2 - 3) + x$ y, por lo tanto, vale

$$\frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 3} = \frac{(x^2 - 3) + x}{x^2 - 3} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3} + \frac{x}{x^2 - 3} = 1 + \frac{x}{x^2 - 3}.$$

Reescribiendo el integrando como hemos visto en el renglón anterior y usando la tabla de primitivas, nos queda una integral más simple para calcular:

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 3} dx = \int 1 dx + \int \frac{x}{x^2 - 3} dx = x + \int \frac{x}{x^2 - 3} dx.$$

Nuestro trabajo se centrará ahora en resolver la integral $\int \frac{x}{x^2 - 3} dx$, para lo cual utilizaremos el método de sustitución. Notemos que si derivamos el denominador obtenemos $(x^2 - 3)' = 2x$ que resulta ser un múltiplo de la función x que se encuentra en el numerador. Entonces si tomamos $z = x^2 - 3$, tenemos $dz = 2x dx$ o, equivalentemente, $\frac{dz}{2} = x dx$ y, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 3} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 3} x dx = \int \frac{1}{z} \frac{dz}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |z| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 3| + C. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando el valor de esta última integral en la ecuación anterior, concluimos que

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 3} dx = x + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 3| + C.$$

Método de Integración por Partes

El *método de integración por partes* nos servirá cuando el integrando es un producto de funciones. Así como el método de sustitución está asociado a la regla de la cadena, el método de integración por partes se puede deducir de la regla del producto para derivadas (ver 1.5.2).

Sean u y v dos funciones derivables, cuyas derivadas u' y v' son continuas. Usaremos este método si debemos calcular la integral

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt$$

pero resulta más sencilla calcular

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Recordemos la regla del producto para derivadas:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Integrando a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx.$$

Como $u(x)v(x)$ es una primitiva de $[u(x)v(x)]'$, usando la regla de Barrow y la linealidad de la integral resulta que

$$u(x)v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Si despejamos la integral que queríamos calcular nos queda la siguiente fórmula:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Al calcular las integrales con el método de integración por partes, debemos elegir una función u y una función v' en el integrando, de manera que conozcamos una primitiva de v' (que llamaremos v) y que la integral que quede al usar el método sea más simple que la anterior.

Si en vez de calcular una integral definida quisiéramos resolver una integral indefinida, tenemos

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

La dificultad de este método reside en elegir la función que derivaremos y la que integraremos (o, lo que es lo mismo, a la que le buscaremos una primitiva), para simplificar la integral. Se recomienda elegir la función u de acuerdo con el orden siguiente (ILATE):

1. Inversa trigonométrica,
2. Logarítmica,
3. Algebraica o polinómica,
4. Trigonométrica y
5. Exponencial.

Ejemplo 1.4.2: Integración por partes

Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

$$1. \int_0^1 x e^x dx.$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x) dx.$$

$$2. \int \ln(x) dx.$$

Resolución:

1. Para resolver la integral pedida, observemos que, como la derivada de un polinomio es otro polinomio de un grado menos, nos conviene considerar a x como la función a derivar (esto coincide con la regla ILATE). Además usando la tabla obtenemos una primitiva de e^x . Entonces elegimos como $u(x) = x$ y como $v'(x) = e^x$, lo que implica que $u'(x) = 1$ y $v(x) = e^x$ (una primitiva de e^x). Aplicando la fórmula para integrales definidas, haciendo cuentas y usando la tabla de integrales, tenemos las siguientes igualdades

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - [e^1 - e^0] = 1.$$

Luego, la respuesta a lo pedido es $\int_0^1 x e^x dx = 1$.

2. En este ejemplo tenemos que calcular la integral

$$\int \ln(x) dx,$$

cuyo integrando no es un producto de dos funciones. Sin embargo, podemos pensar la integral de la siguiente manera:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx.$$

Para elegir las funciones u y v' , notemos que $\ln(x)$ no se encuentra en la lista de integrales inmediatas, por lo tanto será la función

que derivaremos y 1 la función que integraremos. Elegimos $u(x) = \ln(x)$ y $v'(x) = 1$, entonces $u'(x) = \frac{1}{x}$ y $v(x) = x$. Usando el método tenemos como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

3. Si bien anteriormente hemos calculado el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^2(x) dx$$

aplicando el método de sustitución, este ejemplo nos dejará como enseñanza que en algunos casos podemos utilizar distintos métodos de integración para resolver una misma integral.

Debido a que el integrando es un cuadrado

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen(x) \cdot \sen(x) dx,$$

no tenemos muchas opciones para elegir. Tomamos $u(x) = \sen(x)$ y $v'(x) = \sen(x)$, lo que implica que $u'(x) = \cos(x)$ y $v(x) = -\cos(x)$. Entonces por el método de integración por partes, haciendo cuentas, usando la identidad pitagórica y la tabla de integrales obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^2(x) dx &= \\ &= \sen(x)(-\cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)(-\cos(x)) dx = \\ &= -\sen(x)\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \sen^2(x)] dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = \\
 &= -\frac{1}{2} + x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Observando los extremos de esta cadena de igualdades, llegamos a la ecuación

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx.$$

Como queremos conocer el valor de la integral, trabajaremos despejándola de la ecuación anterior

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Método de Integración por Fracciones Simples

El *método de integración por fracciones simples* se utiliza para integrar funciones racionales, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$, con P y Q polinomios.

Si el grado de P es mayor que el grado de Q , por el algoritmo de la división, se puede escribir al numerador usando el cociente C y el resto R (recordar que el resto es nulo o tiene grado menor que Q) del siguiente modo:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

y así reducir el problema original a integrar un polinomio (trivial) y una función racional cuyo numerador tiene grado menor que el denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \int \frac{C(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} \, dx = \int C(x) \, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \, dx.$$

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el grado de P es menor que el grado de Q .

El método consiste en reducir la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples de integrar. Con este fin, primero factorizamos el polinomio Q como producto de polinomios irreducibles, es decir, lo escribiremos como producto de factores lineales y factores cuadráticos sin raíces reales. Luego escribiremos a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones en donde cada denominador es una potencia de solo uno de estos polinomios irreducibles.

Hay cuatro casos básicos que se listan a continuación y los demás casos se resuelven combinando estos cuatro casos. En los casos básicos, buscaremos los valores de las constantes $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ según cómo se factorice Q :

1. Factores lineales distintos (sin repeticiones).

Si $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ con $x_1, x_2, \dots, x_n$ todas raíces distintas de Q , escribimos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

2. Factores lineales repetidos (todos los factores son idénticos).

Si $Q(x) = (x - x_1)^n$ tiene como única raíz a x_1 , escribimos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}.$$

3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, donde ningún par de factores es igual.

Si $Q(x) = (x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2) \dots (x^2 + b_nx + c_n)$ no tiene raíces reales, escribimos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(2x + b_1) + B_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2(2x + b_2) + B_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{A_n(2x + b_n) + B_n}{x^2 + b_nx + c_n}.$$

Observar que en el numerador de cada fracción aparece la derivada de su respectivo denominador, como ejemplo $2x + b_1 = (x^2 + b_1x + c_1)'$.

4. Factores cuadráticos irreducibles repetidos (todos los factores son idénticos)

Si $Q(x) = (x^2 + bx + c)^n$ no tiene raíces reales, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A}{x^2 + bx + c} + B_1 \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} + \cdots + B_n \frac{(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^n} + \\ &+ C_1 \frac{(x^2 + bx + c) - x(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^2} + C_2 \frac{(x^2 + bx + c) - 2x(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^3} + \\ &+ \cdots + C_{n-1} \frac{(x^2 + bx + c) - (n-1)x(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^n}. \end{aligned}$$

Los últimos términos de esta expresión parecen complejas pero observamos que es fácil encontrarles primitivas directas si usamos que

$$\frac{f(x) - kxf'(x)}{(f(x))^{k+1}} = \frac{(f(x))^k - kx(f(x))^{k-1}f'(x)}{(f(x))^{2k}} = \left(\frac{x}{(f(x))^k} \right)'$$

y por lo tanto

$$\int \frac{(x^2 + bx + c) - kx(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^{k+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + bx + c)^k} + C$$

Una vez resueltos los sistemas lineales de las ecuaciones resultantes del paso anterior (es decir, hallados los valores de las constantes $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$) y aplicando la linealidad de la integral, tendremos que resolver algunas de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \blacksquare \int \frac{1}{(x-a)^k} dx & \qquad \qquad \qquad \blacksquare \int \frac{1}{x^2+bx+c} dx \\ \blacksquare \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} dx & \qquad \qquad \qquad \blacksquare \int \frac{(x^2+bx+c)-(k-1)(2x+b)}{(x^2+bx+c)^k} dx \end{aligned}$$

En las últimas tres integrales el polinomio cuadrático del denominador no tiene raíces reales. Estas integrales se resuelven sencillamente usando el método de sustitución.

Para ayudar a la comprensión de la aplicación de este método de integración en el siguiente apartado resolveremos ejemplos de casos básicos y otros usando combinaciones de estos casos.

Ejemplo 1.4.3: Fracciones simples

Calcular las siguientes integrales:

$$1. \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

$$4. \int \frac{3}{(x-1)(x+2)^2} dx.$$

$$2. \int \frac{x^2 - 2}{2(x-3)^3} dx.$$

$$5. \int \frac{x}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Resolución:

1. Para resolver la integral dada, primero usamos el algoritmo de la división pues el grado del polinomio del numerador es mayor al del denominador. Haciendo las cuentas, obtenemos que

$$x^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 2) + 7x - 6$$

y, por lo tanto, valen las igualdades:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx &= \\ &= \int \frac{(x + 3)(x^2 - 3x + 2) + 7x - 6}{x^2 - 3x + 2} dx = \\ &= \int (x + 3) dx + \int \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} dx. \end{aligned}$$

Resta entonces calcular la integral $\int \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Con ese fin, primero factoricemos el polinomio del denominador:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Luego, reducimos el cociente a una suma de fracciones simples buscando las constantes A_1 y A_2 que cumplan la ecuación

$$\frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2},$$

que resulta equivalente a que cumplan la ecuación

$$\frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A_1(x - 2) + A_2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Como los denominadores de las fracciones de ambos miembros son iguales y los numeradores son polinomios, A_1 y A_2 deben satisfacer

$$7x - 6 = A_1(x - 2) + A_2(x - 1)$$

para todo número real x . Asignémosle entonces distintos valores a x para encontrar las constantes A_1 y A_2 . Si bien el sistema de ecuaciones tendrá el mismo resultado independientemente de los valores que escojamos para x , resulta conveniente utilizar las raíces de $Q(x)$ (en caso que las tenga) para ahorrarnos cuentas.

Si $x = 1$, la igualdad resulta

$$7 \cdot 1 - 6 = A_1(1 - 2) + A_2(1 - 1),$$

y obtenemos $A_1 = -1$.

Si $x = 2$, tenemos

$$7 \cdot 2 - 6 = A_1(2 - 2) + A_2(2 - 1),$$

lo que implica que $A_2 = 8$.

Entonces, reemplazando los valores de A_1 y A_2 encontrados tenemos que

$$\frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{8}{x - 2}.$$

Luego integramos y aplicamos la propiedad de linealidad de integrales:

$$\begin{aligned}\int \frac{7x-6}{x^2-3x+2} dx &= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x-1} dx + 8 \int \frac{1}{x-2} dx.\end{aligned}$$

Realizando las sustituciones pertinentes en cada caso vale que

$$\int \frac{7x-6}{x^2-3x+2} dx = -\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la integral pedida cumple

$$\int \frac{x^3}{x^2-3x+2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C.$$

2. En este punto debemos calcular la integral

$$\int \frac{x^2-2}{2(x-3)^3} dx.$$

Observemos que el polinomio del denominador no es mónico, pero podríamos expresar la integral de manera que nos quede para calcular otra con un polinomio mónico en el denominador de la forma siguiente:

$$\int \frac{x^2-2}{2(x-3)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2-2}{(x-3)^3} dx.$$

Como el polinomio del numerador es de grado menor que el del denominador y tiene una única raíz múltiple, debemos hallar los valores de A_1 , A_2 y A_3 de modo que

$$\frac{x^2-2}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3},$$

o equivalentemente que cumplan

$$\frac{x^2 - 2}{(x - 3)^3} = \frac{A_1(x - 3)^2 + A_2(x - 3) + A_3}{(x - 3)^3}.$$

Por lo tanto, las constantes deben satisfacer la igualdad que sigue

$$x^2 - 2 = A_1(x - 3)^2 + A_2(x - 3) + A_3.$$

Para encontrar esos valores, trabajamos como en el ítem anterior dándole valores a x de forma tal que obtengamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si reemplazamos x por 2, 3 y 4, se tienen respectivamente las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 + A_3 = 2 \\ A_3 = 7 \\ A_1 + A_2 + A_3 = 14. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se tiene que $A_1 = 1$, $A_2 = 6$ y $A_3 = 7$. Si reemplazamos por estos valores en la integral, aplicando la linealidad y distribuyendo $\frac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2}{2(x - 3)^3} dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 3} dx + 3 \int \frac{1}{(x - 3)^2} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{(x - 3)^3} dx. \end{aligned}$$

Calculando las integrales mediante el método de sustitución, concluimos

$$\int \frac{x^2 - 2}{2(x - 3)^3} dx = \frac{1}{2} \ln |x - 3| - 3 \frac{1}{x - 3} - \frac{7}{4} \frac{1}{(x - 3)^2} + C.$$

3. Comencemos notando que el denominador de

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

es un producto de factores cuadráticos sin raíces reales. Busquemos A_1 , A_2 , B_1 y B_2 que cumplan

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A_1 \cdot 2x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2 \cdot 2x + B_2}{x^2 + 4}.$$

Sumando las fracciones de la derecha, tenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} &= \\ &= \frac{(A_1 \cdot 2x + B_1)(x^2 + 4) + (A_2 \cdot 2x + B_2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Como en los ejemplos anteriores, igualamos los numeradores y evaluamos en tantos valores de x como incógnitas haya en la ecuación

$$1 = (A_1 \cdot 2x + B_1)(x^2 + 4) + (A_2 \cdot 2x + B_2)(x^2 + 1),$$

y obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Si elegimos para reemplazar x por -1 , 0 , 1 y 2 , tenemos respectivamente las ecuaciones que siguen

$$\begin{cases} 4B_1 + B_2 = 1 \\ 10A_1 + 5B_1 + 4A_2 + 2B_2 = 1 \\ -10A_1 + 5B_1 - 4A_2 + 2B_2 = 1 \\ 32A_1 + 8B_1 + 20A_2 + 5B_2 = 1. \end{cases}$$

Haciendo los despejes necesarios resulta que $A_1 = A_2 = 0$, $B_1 = \frac{1}{3}$ y $B_2 = -\frac{1}{3}$.

Luego reescribimos la integral del siguiente modo:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \int \left[\frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 4} \right] dx$$

y usando la linealidad, integrando por tabla el primer término y por sustitución el segundo, concluimos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+4} dx = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

4. Si queremos resolver la integral pedida:

$$\int \frac{3}{(x-1)(x+2)^2} dx,$$

podemos buscar las constantes A_1 , A_2 y A_3 que cumplen la ecuación:

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}.$$

Razonando de manera análoga a los ítems anteriores, concluimos que dichas constantes deben satisfacer la igualdad

$$3 = A_1(x+2)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x-1).$$

Reemplazamos x por 1, -2 y 0, y obtenemos respectivamente las ecuaciones:

$$\begin{cases} 9A_1 = 3 \\ -3A_3 = 3 \\ 4A_1 - 2A_2 - A_3 = 3. \end{cases}$$

Notemos que la única solución del sistema es $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = -\frac{1}{3}$ y $A_3 = -1$.

Luego, aplicando la linealidad, la integral a calcular cumple:

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} dx.\end{aligned}$$

Entonces, integrando por tabla cada una de las integrales, la respuesta al ejercicio es

$$\int \frac{3}{(x-1)(x+2)^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C.$$

5. Para conocer el resultado de la integral

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} dx$$

encontremos las constantes A_1 , B_1 y A_2 que cumplen

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A_1 \cdot 2x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Queda como ejercicio para el lector realizar las cuentas necesarias para concluir que las constantes A_1 , B_1 y A_2 son $1/4$, $1/2$ y $-1/2$ respectivamente.

Si reemplazamos los valores hallados y usamos la propiedad de linealidad vale que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} dx &= \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx. \end{aligned}$$

Realizando la sustitución $z = x^2 + 1$ en la primera integral y resolviendo por tabla las otras dos, concluimos que

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} dx = \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C.$$

Ejemplo 1.4.4: Integración surtida

Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos que resulten convenientes:

$$1. \int_0^4 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx.$$

$$3. \int e^{\operatorname{sen}(x)} \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx.$$

$$2. \int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx.$$

Resolución:

1. Sustituimos $z = \sqrt{x}$ y obtenemos $dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Si volvemos a usar la sustitución elegida, tenemos $dz = \frac{1}{2z} dx$, o equivalentemente $2z dz = dx$.

Reemplazando en la integral y acomodando la expresión, resulta

$$\int_0^4 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \operatorname{sen}(z) 2z dz = 2 \int_0^2 \operatorname{sen}(z) z dz.$$

Para resolver la última integral, utilizamos el método de integración por partes, considerando

$$\begin{cases} u(z) = z \\ v'(z) = \operatorname{sen}(z) \end{cases}$$

de donde resulta que

$$\begin{cases} u'(z) = 1 \\ v(z) = -\cos(z). \end{cases}$$

Luego, la integral cumple

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 \operatorname{sen}(z) z dz &= 2 \left[-z \cos(z) \Big|_0^2 + \int_0^2 \cos(z) dz \right] = \\ &= 2 \left[-2 \cos(2) + \operatorname{sen}(z) \Big|_0^2 \right] = -4 \cos(2) + 2 \operatorname{sen}(2). \end{aligned}$$

Finalizamos el ejercicio afirmando que

$$\int_0^4 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx = -4 \cos(2) + 2 \operatorname{sen}(2).$$

2. En este ejercicio debemos calcular la integral indefinida

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx,$$

la que resolveremos aplicando el método de integración por sustitución. Motivados por la igualdad

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x)^2 - 4e^x + 3,$$

eligimos sustituir $z = e^x$. Por lo tanto valen $dz = e^x dx$, que equivale a $\frac{1}{z} dz = dx$, y

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx = \int \frac{z}{z^2 - 4z + 3} \frac{1}{z} dz = \int \frac{1}{z^2 - 4z + 3} dz.$$

Apliquemos el método de fracciones simples para resolver la última integral. Factorizando el polinomio del denominador obtenemos $z^2 - 4z + 3 = (z - 1)(z - 3)$. Luego, busquemos A_1 y A_2 que cumplan

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{A_1}{z - 1} + \frac{A_2}{z - 3}.$$

Las constantes deben cumplir la ecuación $1 = A_1(z - 3) + A_2(z - 1)$ para todo z . Si reemplazamos z por 1 y 3, deducimos que $A_1 = -1/2$ y $A_2 = 1/2$.

Reduciendo la integral a fracciones simples, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z^2 - 4z + 3} dz &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{z - 1} dz + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z - 3} dz = \\ &= -\frac{1}{2} \ln |z - 1| + \frac{1}{2} \ln |z - 3| + C. \end{aligned}$$

Recordemos que $z = e^x$. Concluimos que la integral pedida cumple

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx = -\frac{1}{2} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{2} \ln |e^x - 3| + C,$$

que usando las propiedades del logaritmo, la igualdad anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} dx = \ln \left(\sqrt{\left| \frac{e^x - 3}{e^x - 1} \right|} \right) + C.$$

3. En este caso debemos resolver

$$\int e^{\sin(x)} \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

Primero sustituimos $z = \sin(x)$, obteniendo $dz = \cos(x)dx$ y

$$\int e^{\sin(x)} \sin^2(x) \cos(x) dx = \int e^z z^2 dz.$$

Luego apliquemos el método de integración por partes eligiendo

$$\begin{cases} u(z) = z^2 \\ v'(z) = e^z \end{cases}$$

que implica que son verdaderas las afirmaciones

$$\begin{cases} u'(z) = 2z \\ v(z) = e^z. \end{cases}$$

Además, también vale la igualdad que sigue

$$\int e^z z^2 dz = e^z z^2 - 2 \int e^z z dz.$$

Usamos nuevamente el método de integración por partes eligiendo

$$\begin{cases} u(z) = z \\ v'(z) = e^z \end{cases}$$

de donde deducimos que

$$\begin{cases} u'(z) = 1 \\ v(z) = e^z. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$e^z z^2 - 2 \int e^z z \, dz = e^z z^2 - 2 \left[e^z z - \int e^z \, dz \right] = e^z z^2 - 2e^z z + 2e^z + C.$$

Para finalizar, reemplazando $z = \text{sen}(x)$ concluimos que la integral pedida satisface

$$\begin{aligned} \int e^{\text{sen}(x)} \text{sen}^2(x) \cos(x) \, dx &= \\ &= e^{\text{sen}(x)} \text{sen}^2(x) - 2e^{\text{sen}(x)} \text{sen}(x) + 2e^{\text{sen}(x)} + C. \end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 1.4.1: Calcular mediante el método de sustitución.

a. $\int 5 \cos(5s) \, ds.$

i. $\int (t+1)(t^2+2t+5)^{-2/3} \, dt.$

b. $\int t \text{sen}(5t^2) \, dt.$

j. $\int \frac{1}{2+2x+x^2} \, dx.$

c. $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx.$

k. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx.$

d. $\int \frac{1}{2x-3} \, dx.$

l. $\int \frac{(2 \text{sen}(\theta) + 1) \cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta) + \text{sen}(\theta) - 2} \, d\theta.$

e. $\int x^{-1} \ln(x) \, dx.$

m. $\int \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \, dt.$

f. $\int \text{sen}(\alpha) \cos^{-2}(\alpha) \, d\alpha.$

n. $\int \cos^2(x) \, dx.$

g. $\int_0^1 e^{-4x} \, dx.$

ñ. $\int \text{tg}(x) \, dx.$

h. $\int \frac{\text{sen}(\ln(t))}{t} \, dt.$

Sugerencia: para el ítem (n.) utilizar la identidad trigonométrica
 $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$

Ejercicio 1.4.2: Calcular mediante el método de integración por partes.

a. $\int x \cos(x) dx.$

f. $\int \ln(x) dx.$

b. $\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$

g. $\int_1^3 (x-1) \ln(x) dx.$

c. $\int s^2 e^s ds.$

h. $\int \frac{\ln(3x)}{x^2} dx.$

d. $\int e^t \operatorname{sen}(t) dt.$

i. $\int \cos^2(x) dx.$

e. $\int x e^x dx.$

Ejercicio 1.4.3: Calcular mediante el método de fracciones simples.

a. $\int 4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1} dx.$

f. $\int (x^2-1)^{-2} dx.$

b. $\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+3)} dx.$

g. $\int \frac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x} dx.$

c. $\int \frac{2x+2}{x^2-4} dx.$

h. $\int \frac{x^2+3x}{(x+2)^3} dx.$

d. $\int \frac{x}{(x-2)^2(x+3)} dx.$

i. $\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx.$

e. $\int \frac{x^3-2x}{x^2-1} dx.$

Ejercicio 1.4.4: Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos adecuados.

a. $\int \frac{\cos(\ln(t))}{t} dt.$

f. $\int \frac{t^3}{t^2+1} dt.$

b. $\int x^{-1} \ln^2(x) dx.$

g. $\int \frac{3x+1}{5x^2+4x+2} dx.$

c. $\int \ln(\sqrt{s+1}) ds.$

h. $\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx.$

d. $\int x^2(x+9)^{-1/2} dx.$

i. $\int \operatorname{sen}(\ln(\theta)) d\theta.$

e. $\int e^{2x} \cos(3x) dx.$

j. $\int_0^{\pi/2} -3 \operatorname{sen}(2x) \cos(2x) dx.$

$$\text{k. } \int_3^5 \frac{x+3}{x^2(x-2)} dx.$$

$$\text{l. } \int e^{\sqrt{t+3}} dt.$$

$$\text{m. } \int_1^4 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx.$$

$$\text{n. } \int \frac{2}{x^2+4x+7} dx.$$

$$\text{ñ. } \int_3^9 x\sqrt{x+1} dx.$$

$$\text{o. } \int \alpha^{-1/2} \sqrt{3+\sqrt{\alpha}} d\alpha.$$

$$\text{p. } \int \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{4+5\cos(x)}} dx.$$

$$\text{q. } \int x^2 e^{x^3} dx.$$

$$\text{r. } \int \ln(\cos(\theta)) \tan(\theta) d\theta.$$

$$\text{s. } \int \frac{(1+\ln(x))^2}{x} dx.$$

$$\text{t. } \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

$$\text{u. } \int \ln(\text{sen}(\alpha)) \text{sen}^2(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha.$$

$$\text{v. } \int \frac{x^3+2}{x^2(x-1)} dx.$$

$$\text{w. } \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

$$\text{x. } \int (x+3)^2 x^{3/4} dx.$$

$$\text{y. } \int_0^{\ln 2} \frac{3e^{2x}}{2+5e^{2x}+2e^{4x}} dx.$$

$$\text{z. } \int e^{3x} dx.$$

Ejercicio 1.4.5: Continuar con las siguientes integrales.

$$\text{a. } \int \frac{8x^2-14x+13}{8x^2-16x+10} dx.$$

$$\text{b. } \int \frac{\ln(\alpha) \text{sen}(\ln(\alpha))}{\alpha} d\alpha.$$

$$\text{c. } \int \frac{e^x+3e^{2x}}{1+e^{2x}} dx.$$

$$\text{d. } \int (x^3+x) \cos(x^2+1) dx.$$

$$\text{e. } \int \frac{2x+3}{8x^2-16x+10} dx.$$

$$\text{f. } \int \cos(\sqrt{2t+3}) dt.$$

$$\text{g. } \int \frac{1}{\cos(x)(1-\cos^{-2}(x))} dx.$$

$$\text{h. } \int x \ln(\sqrt{x+5}) dx.$$

$$\text{i. } \int (1+5x^2)^{-1} dx.$$

$$\text{j. } \int \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} dx.$$

$$\text{k. } \int \frac{1}{e^{2x}-4} dx.$$

$$\text{l. } \int \arcsen(10x) dx.$$

$$\text{m. } \int (3x^2-1) \ln(x^2-1) dx.$$

$$\text{n. } \int (2x+3) \ln(x+2) dx.$$

$$\text{ñ. } \int \operatorname{tg}^3(x) dx.$$

$$\text{o. } \int 10x(x^2 - 1)^4 \ln(x - 1) dx.$$

1.5 Aplicaciones: Longitudes, Áreas y Volúmenes

Algunas de las aplicaciones más inmediatas de la integración son geométricas: El cálculo de longitudes de arcos, de áreas de superficies y de volúmenes de cuerpos sólidos. Estudiaremos a continuación algunos casos particulares de estas técnicas.

Área entre dos curvas

Si f y g son funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la región

$$S = \{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

(Ver Figura 1.12) tiene un área igual a $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$.

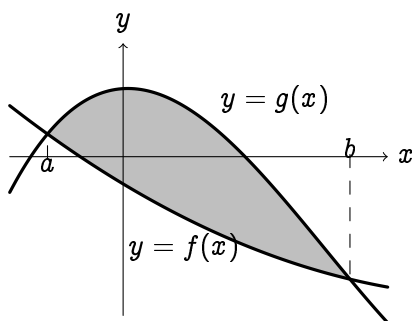


Figura 1.12: La región S encerrada entre dos curvas.

Nos ayudaremos con gráficos para deducir la fórmula anterior. Comencemos con el caso en el que ambas funciones toman valores no negativos. Recordemos que, por la definición de integral definida, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x para $x \in [a, b]$ es la integral $\int_a^b f(x) dx$.

Si f y g son dos funciones integrables no negativas que cumplen que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, podemos calcular el área de la región encerrada por sus gráficos en el intervalo $[a, b]$ restando el área bajo el gráfico de g menos el área bajo el gráfico de f como vemos en la figura 1.13.

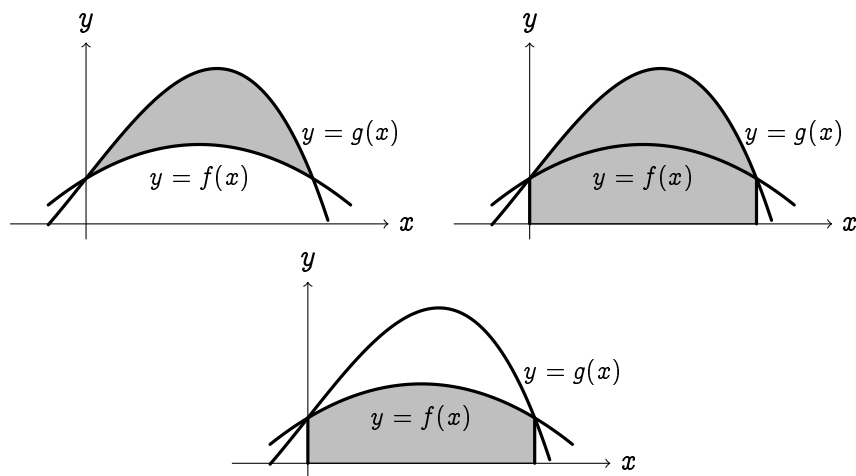


Figura 1.13: Las regiones encerradas entre los gráficos de f y g , entre el gráfico de g y el eje x y entre el gráfico de f y el eje x .

Usando la linealidad de la integral, el área encerrada entre los gráficos de ambas funciones es:

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

Podemos usar la fórmula citada en el párrafo anterior para f y g dos funciones integrables cualesquiera, realizando una traslación vertical de modo tal que ambas resulten no negativas. Si realizamos una traslación el área de la región se mantiene constante.

Consideremos $k \in \mathbb{R}$ de modo tal que $\tilde{f}(x) = f(x) + k$ y $\tilde{g}(x) = g(x) + k$ sean funciones no negativas. En la figura 1.14, podemos ver que las áreas de la región encerrada por los gráficos de f y g y de la región encerrada por los gráficos de $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ coinciden.

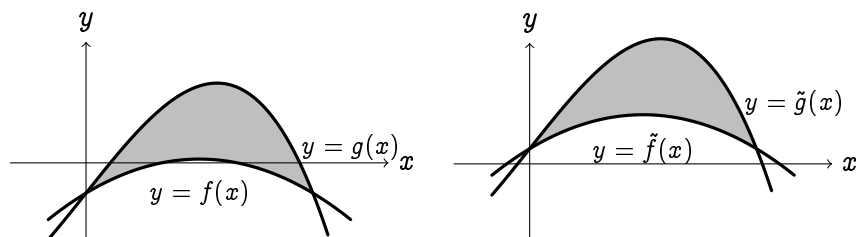


Figura 1.14: Las regiones encerradas por los gráficos de f y g y por los gráficos de $\tilde{f} = f + k$ y $\tilde{g} = g + k$ respectivamente.

El área encerrada por los gráficos de $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ es:

$$\begin{aligned} \int_a^b [\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)] dx &= \int_a^b [(g(x) + k) - (f(x) + k)] dx = \\ &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx. \end{aligned}$$

Luego concluimos que el área de la región encerrada por los gráficos de f y g para x en el intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$.

Este resultado puede interpretarse como una consecuencia del *Principio de Cavalieri* que, en el caso bidimensional, establece que si dos superficies están constituidas por segmentos de recta de la misma longitud, entonces tienen áreas iguales. La figura 1.15 ilustra este hecho

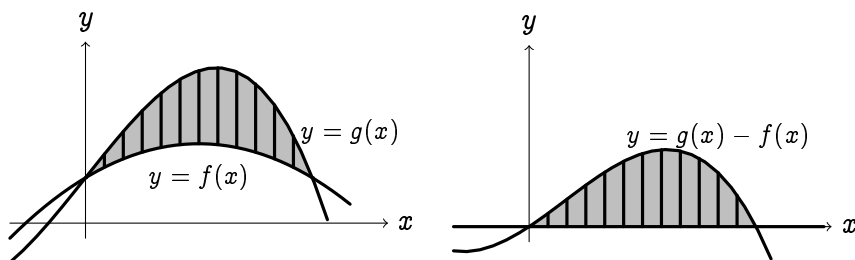


Figura 1.15: Los segmentos de igual longitud de las regiones encerradas entre los gráficos de f y g y por los gráficos de $g - f$ y el eje x .

Ejemplo 1.5.1: Área entre curvas

Calcular el área de la región encerrada entre las curvas dadas por:

1. El gráfico de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje x .
2. Los gráficos de las funciones $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = -x + 8$ y el eje x .
3. Los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ y $g(x) = 16 \ln(x+1)$.

Resolución:

1. Con el fin de conocer la región encerrada, grafiquemos la función. Nos alcanza con hallar los ceros y los conjuntos de positividad y negatividad de f . Si factorizamos la función, obtenemos que $f(x) = x(x-3)(x+3)$. Luego los ceros de f son -3 , 0 y 3 . Para dar con los conjuntos de positividad y negatividad, recordemos que podemos usar el Teorema de Bolzano, pues f es una función continua. Luego, evaluando en algún punto entre dos ceros consecutivos, concluimos que el conjunto de positividad de f es $C^+ = (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ y el de negatividad $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

La Figura 1.16 representa el gráfico la función f , sombreando la región encerrada entre éste y el eje x :

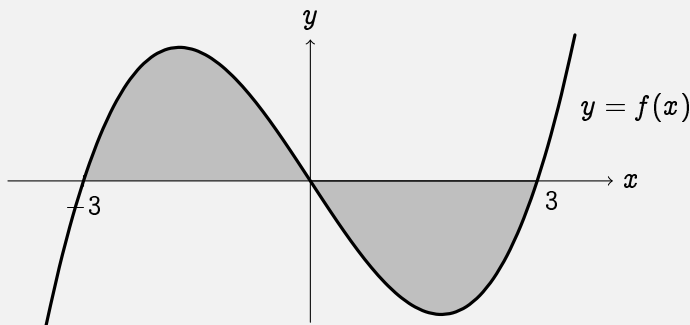


Figura 1.16: Área encerrada entre el gráfico de f y el eje x .

Como $f(x) \geq 0$ si $x \in [-3, 0]$ y $f(x) \leq 0$ si $x \in [0, 3]$, para calcular el área pedida, conviene calcular el área de las dos regiones distintas y sumarlas. Finalmente el área será el resultado de la siguiente cuenta que se dejará en manos del lector:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^3 -f(x) dx &= \\ &= \int_{-3}^0 [x^3 - 9x] dx + \int_0^3 -[x^3 - 9x] dx = \frac{81}{2}. \end{aligned}$$

2. Para calcular el área entre las curvas dadas por los gráficos de las funciones $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = -x+8$ y el eje x , grafiquemos

ambas funciones en el mismo sistema de ejes coordenados. Con ese objetivo las analizamos.

Observemos que el dominio de f es $[2, +\infty)$ y el de g es $\mathbb{R}$. Ambas funciones tienen un único cero, en el caso de f es 2 y en el caso de g es 8.

También buscamos los puntos de intersección entre los gráficos de f y de g , para eso resolvamos la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x-2} = -x+8.$$

Luego, si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad obtenemos

$$x-2 = (-x+8)^2.$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio y acomodamos la ecuación. Notemos que debemos buscar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$-x^2 + 17x - 66 = 0.$$

Los valores que puede tomar x son 6 u 11. Pero solo 6 es la solución pues 11 no cumple con la ecuación original $\sqrt{x-2} = -x+8$. Luego, el único punto de corte entre los gráficos de las funciones f y g es $(6; f(6))$.

Al conocer el comportamiento de ambas funciones, podemos graficarlas para determinar la región encerrada entre los gráficos de ellas y el eje x (ver Figura 1.17).

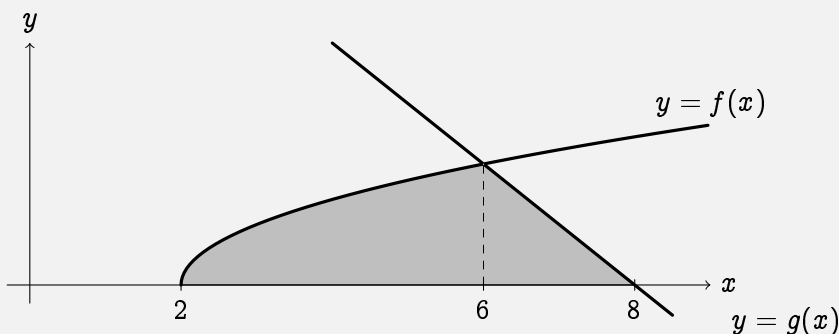


Figura 1.17: Área encerrada entre el gráfico de f , el de g y el eje x .

Para obtener el valor del área pedida, debemos partir la región en dos regiones más pequeñas y calcular el área de cada una de ellas. Entonces el área total que debemos calcular está dada por la siguiente expresión

$$\int_2^6 \sqrt{x-2} dx + \int_6^8 (-x+8) dx.$$

Dejamos la resolución final al lector. Afirmamos que el área pedida es $22/3$.

3. En este punto debemos dar el valor del área de la región encerrada entre las curvas dadas por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ y $g(x) = 16 \ln(x+1)$.

Este ejemplo lo trabajaremos de un modo distinto a los anteriores, ya que no graficaremos ambas funciones. Nos valdremos del Teorema de Bolzano (1.4.1).

Observemos que el dominio de ambas funciones es el mismo y resulta ser $(-1, +\infty)$. Podemos afirmar que f y g son continuas en $(-1, +\infty)$ por ser composición de funciones continuas.

Por otro lado, es sencillo ver que f y g tienen una asíntota vertical de ecuación $x = -1$.

Buscamos los puntos de intersección entre los gráficos de f y g :

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 \ln(x+1) = 16 \ln(x+1)$$

$$x^2 \ln(x+1) - 16 \ln(x+1) = 0$$

$$(x^2 - 16) \ln(x+1) = 0$$

Luego las soluciones de la ecuación cumplen alguna de las dos igualdades siguientes

$$x^2 - 16 = 0 \text{ ó } \ln(x+1) = 0.$$

Si resolvemos las ecuaciones obtenemos $x = 4$, $x = -4$ ó $x = 0$, pero descartaremos $x = -4$ ya que no pertenece al dominio de las funciones f y g .

Como las funciones son continuas en su dominio, la región buscada es la que se encuentra encerrada entre los gráficos de f y g para $x \in [0, 4]$. Además, como solamente se cortan en los extremos del intervalos y sabiendo que $f(1) < g(1)$, por el Teorema de Bolzano (1.4.1) podemos asegurar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 4]$.

Entonces el área buscada es

$$\int_0^4 [g(x) - f(x)] dx.$$

Al reemplazar las funciones correspondientes y acomodar la expresión resultante, obtenemos

$$\int_0^4 [16 \ln(x+1) - x^2 \ln(x+1)] dx = \int_0^4 (16 - x^2) \ln(x+1) dx.$$

Notemos que no hay una sustitución clara que podamos realizar, entonces probaremos aplicar el método de integración por partes, usando la regla ILATE.

Tomando $u(x) = \ln(x+1)$ y $v'(x) = 16 - x^2$, tenemos que $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ y $v(x) = 16x - \frac{x^3}{3}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^4 (16 - x^2) \ln(x+1) dx &= \\ &= \ln(x+1) \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{16x - \frac{x^3}{3}}{x+1} dx. \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular una integral de una función racional, donde el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador. Usamos el algoritmo de la división y obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{16x - \frac{x^3}{3}}{x+1} = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{47}{3} - \frac{\frac{47}{3}}{x+1}.$$

Luego, usando la linealidad y la tabla de primitivas, calculamos la integral que sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{16x - \frac{x^3}{3}}{x+1} dx &= \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{49}{3}}{x+1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^4 x^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^4 x dx - \int_0^4 \frac{1}{3} dx + \frac{49}{3} \int_0^4 \frac{1}{x+1} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{1}{3} x \Big|_0^4 + \frac{49}{3} \ln(x+1) \Big|_0^4 = -\frac{52}{9} + \frac{49}{3} \ln(5).\end{aligned}$$

Finalmente, el área buscada es

$$\begin{aligned}\int_0^4 (16 - x^2) \ln(x+1) dx &= \frac{128}{3} \ln(5) - \left(-\frac{52}{9} + \frac{49}{3} \ln(5) \right) = \\ &= \frac{79}{9} \ln(5) + \frac{52}{9}.\end{aligned}$$

Longitud de arco

Consideremos una curva (o arco) definida sobre un intervalo $[a, b]$ por el gráfico de una función $f(x)$ continua en el intervalo y derivable en su interior. Definimos su *longitud*, l , por medio de la ecuación:

$$l = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx.$$

Esta noción de longitud de arco coincide con la idea intuitiva en el sentido que si ponemos una cuerda sobre el gráfico de la función y luego rectificamos esta cuerda sobre una regla, la longitud que obtendremos es la longitud de arco recién definida. Daremos a continuación una justificación elemental de este resultado.

Supongamos que queremos aproximar la longitud de la curva anterior por medio de la longitud de una poligonal, como puede verse en la Figura 1.18. Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, donde n es un entero positivo y definamos la poligonal

construida con segmentos que valen lo mismo que f exactamente sobre estos puntos. Los bordes de los subintervalos serán los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

y cada subintervalo medirá $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

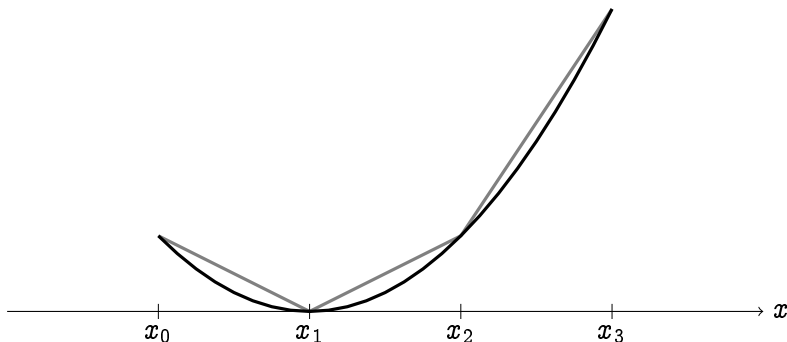


Figura 1.18: Una curva y una poligonal que la aproxima.

Usando la igualdad pitagórica, la longitud del i -ésimo segmento será

$$\sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}$$

y entonces la longitud total de la poligonal, suma de las longitudes de los segmentos, puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (\Delta x)^2}.$$

Sacando Δx de factor común fuera de la raíz obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \Delta x \cdot \sqrt{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2 + 1}.$$

Teniendo en cuenta que f es continua en cada subintervalo y derivable en su interior, podemos usar ahora el Teorema de valor medio (Ver Teorema 1.5.5) y escribir a $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$ como $f'(\xi_i)$ con $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Luego, la longitud de la poligonal para un n dado será

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1} \cdot \Delta x \text{ con } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

lo que converge a

$$\int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx$$

cuando n tiende a infinito. Esta última integral representa la longitud de la curva.

Ejemplo 1.5.2: Longitud de arco

Calcular la longitud de la curva dada por:

1. La función $f(x) = 2\sqrt{x^3}$ para $0 \leq x \leq 11$.
2. La función $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$ para $1 \leq x \leq 2$.

Resolución:

1. Como la longitud está dada por la integral siguiente

$$\int_0^{11} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

calculamos la derivada de f y la reemplazamos en la integral. Luego, obtenemos

$$\int_0^{11} \sqrt{1 + [3\sqrt{x}]^2} dx = \int_0^{11} \sqrt{1 + 9x} dx.$$

Resolvamos la integral considerando la sustitución $z = 1 + 9x$, luego $dz = 9dx$ y

$$\int_0^{11} \sqrt{1 + 9x} dx = \frac{1}{9} \int_1^{100} \sqrt{z} dz = \frac{1}{9} \frac{\sqrt{z^3}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{100} = 74.$$

Concluimos que la longitud de la curva es 74.

2. En este caso, la longitud de la curva está dada por

$$\int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right]^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \sqrt{1 + \left[\frac{x^2 - 1}{2x} \right]^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} dx = \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} dx = \int_1^2 \sqrt{\left[\frac{x^2 + 1}{2x} \right]^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{2x} dx = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln(2).
\end{aligned}$$

Volumen de un sólido de revolución

Considere el cuerpo sólido que surge de la rotación (revolución) de una figura plana comprendida entre $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje x .

Así como el área entre curvas es la integral de la sección vertical (la longitud de los segmentos verticales), al volumen de un sólido de revolución obtenido al revolucionar una función alrededor del eje x podemos pensarlo como la integral de las secciones verticales (el área de las superficies verticales). Cada sección vertical es un círculo de radio $f(x)$ cuya área es $\pi \cdot f^2(x)$, luego el volumen del sólido se obtiene a partir de la integral entre a y b del área de los círculos, es decir, el *volumen del sólido de revolución* generado está dado por la fórmula:

$$\text{Vol} = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Ejemplo 1.5.3: Volumen de un sólido de revolución

Calcular el volumen de los siguientes sólidos de revolución:

1. El generado por la rotación alrededor del eje x de la región plana encerrada por las curvas $y = \frac{1}{2}x$, $x = 4$ y el eje x .
2. El generado por la rotación alrededor del eje y de la región plana encerrada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 2$ y el eje y .

Resolución:

1. Primero grafiquemos la región que debemos rotar alrededor del eje x (ver Figura 1.19).

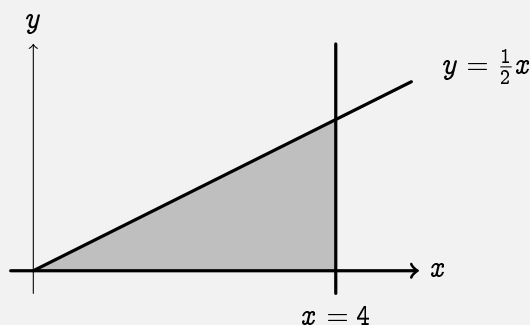


Figura 1.19: Región plana a rotar alrededor del eje x .

Luego el sólido (ver Figura 1.20) al que le calcularemos el volumen es un cono acostado de altura 4 y de radio 2:

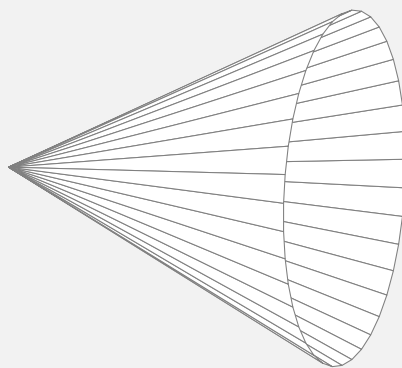


Figura 1.20: Cono de revolución resultante.

El volumen está dado por la fórmula

$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dx = \int_0^4 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \pi.$$

Observación: La fórmula usual para el volumen de un cono de radio r y altura h son $V = \frac{1}{3} r^2 h \pi$. Dejamos al lector verificar que el valor computado coincide con lo esperado.

2. Calculemos el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor del eje y de la región plana encerrada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 2$ y el eje y . Primero grafiquemos la región encerrada entre las cuatro curvas (ver Figura 1.21).

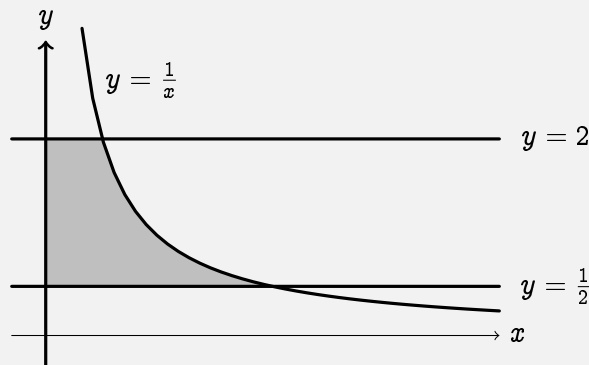


Figura 1.21: Región plana a rotar alrededor del eje y .

Grafiquemos el sólido al que le calcularemos el volumen (ver Figura 1.22):

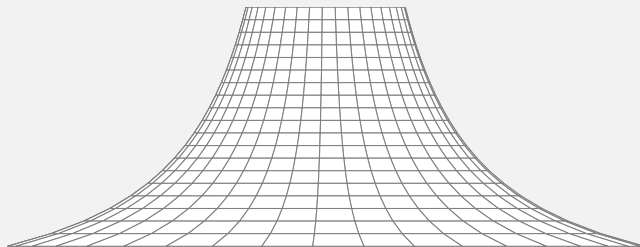


Figura 1.22: Sólido de revolución resultante.

En este caso, la variable de integración es y en lugar de x , pues es el eje de simetría del sólido. Luego, debemos calcular en la ecuación homográfica x en función de y . Si despejamos x obtenemos $x = \frac{1}{y}$. En este caso la variable y varía entre $\frac{1}{2}$ y 2. Por lo tanto el volumen buscado es el resultado de la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi \left(\frac{1}{y} \right)^2 dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \\
 &= \pi \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{3}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.4: Trompeta de Torricelli

La trompeta de Torricelli es una superficie de revolución que fue descrita por primera vez por Torricelli (discípulo de Galileo) en el siglo XVII. Es la superficie de revolución que resulta de rotar alrededor del eje x la curva $y = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$. El siguiente dibujo muestra una representación gráfica de la trompeta.

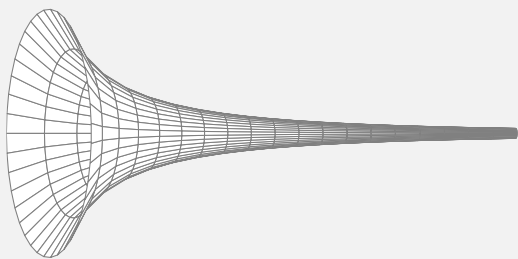


Figura 1.23: Trompeta de Torricelli.

Para poder calcular el volumen de esta trompeta necesitamos desarrollar el concepto de *integral impropia* como lo haremos más adelante. Dejamos como ejercicio al lector, calcular el volumen de la trompeta de Torricelli truncada para valores de x entre 1 y 10.

Ejercicios

Ejercicio 1.5.1: Decidir si son verdaderas o falsas. Graficar.

- El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$, el eje x y el eje y está dada por la siguiente integral:

$$\int_0^4 (x - 2) dx.$$
- El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \leq x \leq 3$ está dada por la siguiente suma de integrales:

$$-\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx.$$
- El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$ está dada por la integral siguiente:

$$\int_{-1}^2 (x^2 + x - 2) dx.$$

Ejercicio 1.5.2: Definir el área de cada una de las regiones sombreadas mediante integrales

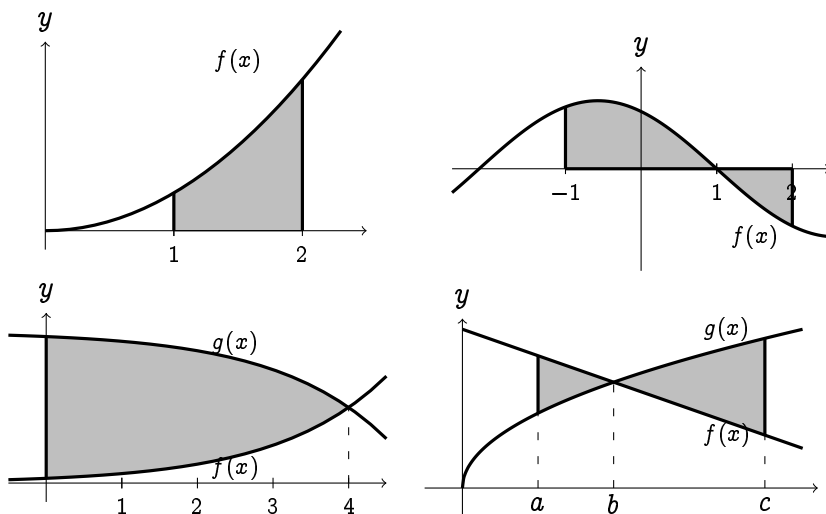


Figura 1.24: Áreas.

Ejercicio 1.5.3: Calcular el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo indicado en cada caso:

- | | |
|--|--|
| a. $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$. | d. $f(x) = e^x - 1$ en $[0, e]$. |
| b. $f(x) = \cos(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. | e. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ en $[-2, 1]$. |
| c. $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1, 1]$. | f. $f(x) = x^2 - x$ en $[-1, 3]$. |

Ejercicio 1.5.4: En cada caso, calcular el área de la región encerrada por las curvas.

Sugerencia: hacer los gráficos.

- | | |
|--|--|
| a. $y = x$ e $y = x^2 - 1$. | g. $y = e^{x-1}$, $y = 1$ y $x = 0$. |
| b. $y = x^3$ e $y = x$. | h. $y = \sin(x)$ e $y = x^2 - \pi^2$. |
| c. $y = x^{1/3}$, $y = 1$ y $x = 0$. | i. $y = -\cos(x)$, $y = x + \pi/2$ e $y = -x + \pi/2$. |
| d. $y = x^3 - 12x$ e $y = x^2$. | j. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ y $x = -1$. |
| e. $y = x^{1/2}$, $y = x - 2$ y $x = 0$. | k. $y = \sqrt{x+3}$ e $y = x - 3$. |
| f. $y = x^{1/2}$, $y = x - 2$ e $y = 0$. | |

l. $y = 2\sqrt{2}$, $y = 2x - 4$ y $x = 0$.

m. $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en el punto $x = -1$.

Ejercicio 1.5.5: Calcular el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, en el intervalo señalado en cada caso:

a. $f(x) = \frac{12}{x^2 + 2}$, $g(x) = x^2 - 2$ en $[-3, 0]$

b. $f(x) = \frac{3x - 3}{x + 3}$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$ en $[-1, 1]$

c. $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$, $g(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$ en $[0, 1]$

d. $f(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ en $[\frac{-1}{2}, 0]$

Ejercicio 1.5.6: Hallar el área de la región comprendida entre las curvas dadas.

a. $y = x\sqrt{2x + 3}$, $y = 0$ ($x \leq 0$).

d. $y = 0$, $y = \sin(x) \cos(x) e^{\sin(x)}$,
 $x = 0$ y $x = \pi$.

b. $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$,
 $y = \ln(x + 4)$.

e. $y = (x + 2)^2$, $y = \sqrt{8(x + 2)}$.

c. $y = x^2 e^{3x+1}$, $y = 4 e^{3x+1}$.

f. $y = (x^2 - 8) \ln(x - 1)$,
 $y = \ln(x - 1)$.

Ejercicio 1.5.7: Calcular la longitud de la curva indicada en cada caso.

a. $y = 2\sqrt{x^3}$, $x \in [\frac{1}{3}, 7]$.

d. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3}$, $x \in [1, 4]$.

b. $y = \frac{x^4 + 3}{6x}$, $x \in [1, 4]$.

e. $y = e^x$, $x \in [-1, 1]$.

c. circunferencia de radio r .

f. $y = \cosh(x)$, $x \in [0, 1]$.*

Recordar que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$[\cosh(x)]' = \sinh(x)$$

$$[\sinh(x)]' = \cosh(x)$$

Ejercicio 1.5.8: Graficar la región plana encerrada entre las curvas indicadas. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje x la región encerrada por recta $y = 0$ y las siguientes curvas:

- a. $y = x^2$, $x = 0$ y $x = 2$. c. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ y $x = 4$.
 b. $y = x^3$, $x = 0$ y $x = 2$. d. $y = x^{3/2}$, $x = 1$ y $x = 3$.

Ejercicio 1.5.9: Graficar la región plana encerrada entre las curvas indicadas. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región dada alrededor del eje y .

- a. $x = y^2$, $y = 0$, $y = 2$ y el eje y .
 b. $xy = 2$, $y = 1$, $y = 6$ y el eje y .
 c. $x = \sqrt{y}$, $y = 4$ y $x = 0$.
 d. $y = x^2$, $x = 0$ e $y = 2$.

Ejercicio 1.5.10: Dar los posibles números reales a de modo que el área encerrada entre los gráficos de $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = a^2$ sea 3.

1.6 Integración numérica

En muchos casos la integración exacta, analítica, es muy difícil o directamente imposible de realizar. Sin embargo, diversos modelos matemáticos utilizados en aplicaciones requieren el cálculo (al menos aproximado) de integrales para resultar útiles. La integración numérica incluye una gran variedad de algoritmos para aproximar el valor numérico de una integral definida. El error de estas aproximaciones dependerá del método que se utilice. Algunos de estos métodos los estudiarán en la materia *Métodos numéricos*. A continuación veremos el más sencillo de los métodos de integración numérica.

Método de los trapecios

La *regla del trapecio* permite aproximar el valor de la integral de una función f continua en $[a, b]$ por medio de sumas de n trapecios de base $h = \frac{b-a}{n}$. Ver Figura 1.25. El valor de la integral es igual a la suma de

las áreas de los trapecios, salvo un error $\varepsilon(n)$ que depende de cuántos trapecios se utilicen.

$$\int_a^b f(x)dx = h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right] + \varepsilon(n).$$

No nos detendremos a estimar el error cometido. Solo observaremos que a medida que se utiliza una partición más fina del intervalo $[a, b]$, el error tiende a cero. En símbolos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$.

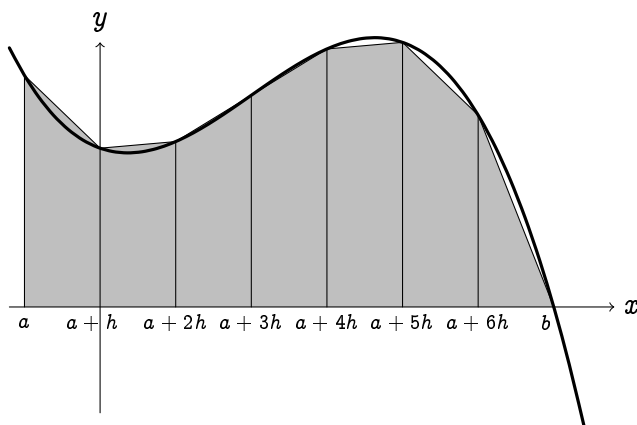


Figura 1.25: Aproximación del área bajo una curva mediante el método de los trapecios.

Calculemos el área sombreada del gráfico anterior. Recordemos que un trapecio con base mayor de longitud B , base menor de longitud b y altura de longitud h tiene área $\frac{h(b+B)}{2}$. En el gráfico todos los trapecios tienen altura h .

Si miramos el primer trapecio, la base mayor tiene longitud $f(a)$ y base menor, $f(a+h)$. Luego su área es

$$\frac{h(f(a) + f(a+h))}{2}$$

Las bases mayores y menores del segundo trapecio miden $f(a+h)$ y $f(a+2h)$ respectivamente, entonces su área es

$$\frac{h(f(a+h) + f(a+2h))}{2}.$$

Y así sucesivamente. Por lo tanto el área sombreada, que es igual a la suma de las áreas de los trapecios correspondientes, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{h(f(a) + f(a+h))}{2} + \frac{h(f(a+h) + f(a+2h))}{2} + \dots + \frac{h(f(b-h) + f(b))}{2} \\ &= h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Este es solo uno de los métodos más sencillos de integración numérica. En el Capítulo 11 del libro de Piskunov (Piskunov 1977) y en el Capítulo 21 del libro de Chapra (Chapra y Canale 2007) pueden encontrarse más detalles sobre este y otros métodos numéricos de integración.

Veremos en el siguiente ejemplo que a medida que la partición del intervalo $[a, b]$ es más fina, el área dada por los trapecios se aproximará al área bajo la curva dada por el gráfico de f .

Ejemplo 1.6.1: Integración numérica

Aproximar el valor del área delimitada por el eje x , las rectas $x = 0, x = 4$ y el gráfico de la función $y = e^x$ considerando $n = 2, n = 5$ y $n = 10$ y comparar con el valor exacto.

Resolución: En la siguiente tabla mostraremos los valores de la suma de las áreas de los trapecios y en los siguientes gráficos se puede observar que el valor de esas áreas se aproxima más al valor de la integral a medida que aumenta n (ver Figuras 1.26 y 1.27).

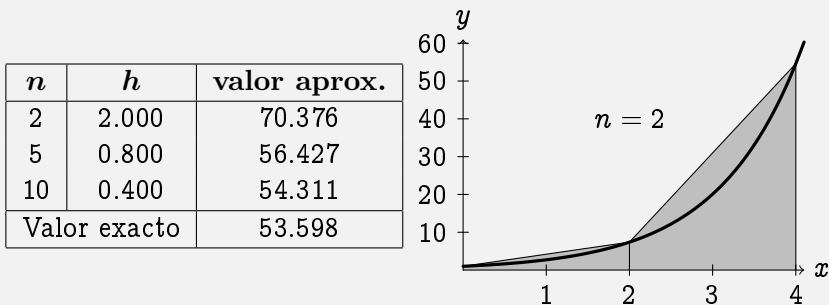


Figura 1.26: Aproximación con $n = 2$ del área debajo de la curva.

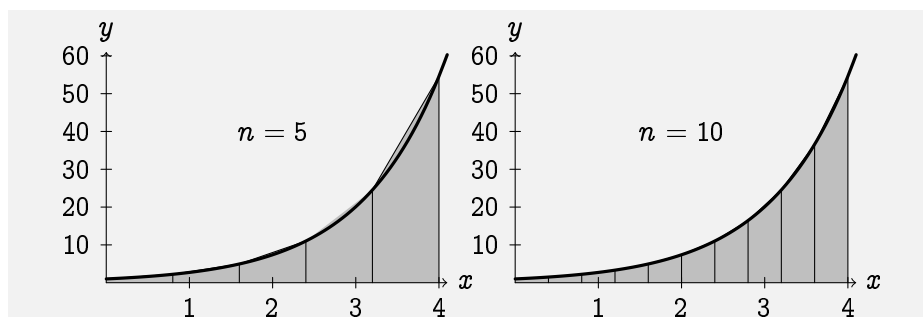


Figura 1.27: Aproximaciones usando $n = 5$ y $n = 10$.

Método de integración de Montecarlo

El método numérico que vemos aquí es una versión muy sencilla de los métodos de integración de Montecarlo. Se trata de un algoritmo que permite aproximar el valor de una integral definida.

Para aproximar numéricamente la integral de una función f en un intervalo $[a, b]$, el método de Montecarlo no utiliza una grilla regular como en el caso del método de los trapecios donde el intervalo es dividido en n subintervalos de igual longitud. Este método se basa en seleccionar aleatoriamente n puntos, $p_1, \dots, p_n$, en el intervalo de integración $[a, b]$, y en utilizar el valor de la función en esos puntos para aproximar el valor de la integral.

A medida que la cantidad de puntos seleccionados aleatoriamente tiende a infinito, el valor estimado tiende al valor exacto.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(p_i) = \int_a^b f(x) dx.$$

Si bien el método es no determinístico en el sentido que al repetirlo puede dar resultados diferentes, suele aproximar muy bien el valor exacto de la integral y permite aproximar muy velozmente integrales multidimensionales.

Ejercicios

Ejercicio 1.6.1: Aproximar las siguientes integrales utilizando el método de los trapecios y el de Montecarlo, considerando $n = 2$ y $n = 4$. Comparar los resultados entre sí y con el valor exacto.

a. $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) dx$. b. $\int_0^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx$. c. $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

Ejercicio 1.6.2: Aproximar el valor del área $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ usando la regla del trapecio con $n = 6$.

Ejercicio 1.6.3: Suponer que la función $y = f(x)$ es continua. Aproximar la integral $\int_0^2 f(x) dx$ usando los datos de la tabla obtenidos en un experimento.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14	7.25	7.64	8.08	8.14

Ejercicio 1.6.4: Usar la regla del trapecio para estimar los metros cuadrados de un lote de 1000m de largo del que se tienen los siguientes datos sobre su ancho:

x	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
y	125	125	120	112	90	90	95	88	75	35	0

1.7 Integrales impropias

Hasta este momento hemos trabajado con funciones integrables sobre intervalos cerrados y acotados, veremos que podemos extender la noción de integrabilidad en ciertos contextos, logrando integrar sobre intervalos infinitos o incluso funciones no acotadas. Como aplicación calcularemos área y el volumen de la trompeta de Torricelli mencionada anteriormente.

Definición: Una integral sobre un intervalo no acotado o una integral de una función que no está definida o no está acotada sobre todo el intervalo de integración, se llamará *integral impropia* y se definirá, en el caso más sencillo, como un límite de integrales propias y en el caso general como sumas de estos límites.

Diremos que la integral es *convergente* si todos los límites involucrados existen y son finitos. En otro caso diremos que la integral es *divergente*.

Más precisamente definiremos las integrales impropias de la siguiente forma:

1. *Primera especie:* Si el intervalo de integración es no acotado a un solo lado y la función del integrando es propiamente integrable sobre todo intervalo cerrado y acotado dentro del intervalo de integración se definirá la integral impropia de la siguiente manera:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

ó

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x) dx$$

2. *Segunda especie:* Es el caso de una integral cuyo intervalo de integración $[a, b]$ es acotado, pero la función del integrando no es propiamente integrable sobre este intervalo por presentar problemas exactamente en un extremo. Es decir, la función es propiamente integrable en cualquier intervalo cerrado que no contenga ese extremo problemático.

Si el punto problemático es el extremo b (puede que f no esté definida en b o que no esté acotada en ningún entorno de b), se define la integral impropia como sigue

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow b^-} \int_a^M f(x) dx.$$

Análogamente, si f tiene un problema en a , la integral impropia se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow a^+} \int_M^b f(x) dx.$$

3. *Tercera especie:* Son las combinaciones de los casos anteriores y se resuelven partiendo el intervalo de integración en subintervalos y reescribiendo la integral como suma de dos o más integrales impropias de primera o segunda especie.

Ejemplo 1.7.1: Impropias

Analizar la convergencia de las siguientes integrales y calcular su valor en caso que resulten convergentes:

$$1. \int_{-\infty}^4 xe^x dx.$$

$$3. \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x) - 1} dx.$$

$$2. \int_{-5}^{-3} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx.$$

Resolución:

- Como la función xe^x es continua en $\mathbb{R}$ y el intervalo de integración es no acotado, podemos afirmar que debemos calcular una integral impropia de primer especie. Para decidir si la integral es convergente o divergente, debemos hallar el valor del siguiente límite

$$\int_{-\infty}^4 xe^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^4 xe^x dx.$$

Aplicando el método de partes, resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^4 xe^x dx &= xe^x \Big|_a^4 - \int_a^4 e^x dx = \\ &= 4e^4 - ae^a - \left[e^x \Big|_a^4 \right] = 3e^4 - (a - 1)e^a. \end{aligned}$$

Entonces, usando álgebra de límites, calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^4 xe^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} 3e^4 - (a - 1)e^a = \\ &= 3e^4 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a - 1}{e^{-a}} = 3e^4. \end{aligned}$$

La última igualdad resulta de aplicar la Regla de L'Hôpital en el caso $\frac{\infty}{\infty}$ para resolver la indeterminación del límite del último miembro:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a-1}{e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-a}} = 0.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la integral impropia converge y que su valor resulta ser $3e^4$.

2. Como el intervalo de integración de la integral que debemos calcular

$$\int_{-5}^{-3} \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

es acotado, veamos si hay puntos del intervalo $[-5; 3]$ en los cuales la función del integrando es discontinua.

Llamemos $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}}$, entonces $x \in \text{Dom}(f)$ si y solo si $x^2-9 > 0$. Luego $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Observemos que en el intervalo $[-5, -3]$ la función no se encuentra definida en -3 y es continua en el resto del intervalo. Afirmamos que la integral es impropia de segunda especie y la integral se calcula como sigue

$$\int_{-5}^{-3} \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}} dx = \lim_{b \rightarrow -3^-} \int_{-5}^b \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}} dx.$$

Resolvemos la integral definida de la derecha, para eso realizamos la sustitución $z = x^2 - 9$ y obtenemos $dz = 2x dx$ y

$$\int_{-5}^b \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}} dx = \int_{(-5)^2-9}^{b^2-9} \frac{2}{\sqrt{z}} dz = 2 \int_{16}^{b^2-9} z^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Usamos la tabla de primitivas y aplicamos la Regla de Barrow (1.3.1):

$$2 \int_{16}^{b^2-9} z^{-\frac{1}{2}} dz = 4z^{\frac{1}{2}} \Big|_{16}^{b^2-9} = 4\sqrt{b^2-9} - 16.$$

Ahora resolvamos el límite que sigue

$$\lim_{b \rightarrow -3^-} \int_{-5}^b \frac{4x}{\sqrt{x^2-9}} dx = \lim_{b \rightarrow -3^-} [4\sqrt{b^2-9} - 16] = -16.$$

Entonces la integral impropia es convergente y vale

$$\int_{-5}^{-3} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx = -16.$$

3. Comencemos buscando los problemas de dominio y continuidad de la función que se encuentra en el integrando de

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx.$$

Llamemos $f(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1}$ y notemos que el denominador se anula solamente en $x = \frac{\pi}{2}$ dentro del intervalo de integración $[0, \pi]$. Nuevamente nos encontramos ante a una integral impropia de segunda especie.

Como en este caso la función del integrando no se encuentra definida en un punto en el interior del intervalo de integración, debemos partir la integral en dos integrales impropias de manera que los problemas de continuidad queden en los bordes de los intervalos de integración:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx.$$

De este modo, la integral del lado izquierdo de la igualdad resulta convergente si y solo si ambas integrales del lado derecho lo son. Por este motivo estudiemos la convergencia de estas últimas. Para ahorrarnos trabajo, calculemos primero la integral indefinida

$$\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx.$$

Sustituyendo $z = \operatorname{sen}(x) - 1$, obtenemos $dz = \cos(x)dx$ y

$$\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx = \int \frac{1}{z} dz = \ln |z| + C = \ln |\operatorname{sen}(x) - 1| + C.$$

Luego recordando que debemos calcular un límite y usando la Regla de Barrow (1.3.1), tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\operatorname{sen}(x) - 1| \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\operatorname{sen}(b) - 1| - \ln |\operatorname{sen}(0) - 1| = -\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1} dx$ es divergente.

4. Para poder clasificar y decidir si es convergente la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx,$$

observemos que el intervalo de integración no es acotado, y analicemos la continuidad de la función del integrando $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

Para encontrar el dominio de f , busquemos los valores de x que anulen el denominador, es decir, resolvemos la ecuación $e^{2x} - 1 = 0$ que es equivalente a $(e^x)^2 - 1 = 0$.

Luego $e^x = 1$ o bien $e^x = -1$. Como la última ecuación no tiene soluciones reales, resulta que la única solución es $x = 0$ y, por lo tanto, el dominio natural de f es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Estamos en condiciones de asegurar que la integral es impropia de tercera especie. Recordemos que al trabajar con una integral impropia con más de un problema en el intervalo de integración debemos partirla en integrales impropias en cuyos intervalos de integración haya un único problema y el mismo se encuentre en un extremo del intervalo. En nuestro caso la partiremos de la siguiente manera:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

y trabajaremos con las integrales del lado derecho de la igualdad. No olvidemos que para que la integral buscada converja es necesario y suficiente que ambas integrales del lado derecho de la igualdad converjan.

Para poder responder al enunciado de este ejercicio, calculemos la integral indefinida

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1} dx$$

sustituyendo $z = e^x$. Entonces valen las igualdades $dz = e^x dx$ y, al reemplazar y factorizar el polinomio del denominador,

$$\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1} dx = \int \frac{1}{z^2 - 1} dz = \int \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} dz.$$

Aplicando el método de fracciones simples y usando la propiedad de linealidad, podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} dz &= \int \left[\frac{1/2}{z - 1} - \frac{1/2}{z + 1} \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{z - 1} dz - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z + 1} dz. \end{aligned}$$

Si integramos y acomodamos la expresión usando las propiedades del logaritmo, obtenemos

$$\int \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} dz = \frac{1}{2} \ln |z - 1| - \frac{1}{2} \ln |z + 1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| + C.$$

Si reemplazamos $z = e^x$, resulta

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$$

Recordemos que calcular una integral impropia se traduce como resolver un límite. Entonces, al aplicar la Regla de Barrow (1.3.1), debemos calcular el siguiente límite:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^1 - 1}{e^1 + 1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right| \right].$$

Como $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{e^a - 1}{e^a + 1} = 0$, resulta que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \right| = -\infty$.

Por lo tanto $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ es divergente.

Concluimos que $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ diverge.

Ejemplo 1.7.2: Trompeta de Torricelli

Calcular el volumen de la trompeta de Torricelli.

Resolución: El volumen de la trompeta está dado por la integral impropia de primera especie

$$\int_1^{+\infty} \pi r^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \Big|_1^b = \pi.$$

Usando integrales múltiples puede mostrarse que la superficie de un sólido obtenido al revolucionar alrededor del eje x la región plana comprendida entre la curva dada por el gráfico de la función f , el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\int_a^b 2\pi |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Al calcular la integral impropia para obtener el área de la trompeta, podemos ver que

$$\int_1^{+\infty} 2\pi \left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2} \right)^2} dx = +\infty.$$

No daremos los detalles de la cuenta anterior. Para poder resolverla es necesario utilizar los métodos de integración por partes y por sustitución e identidades trigonométricas.

Concluimos, con tanta sorpresa como lo hizo Torricelli hace casi 400 años, que esta trompeta tiene un volumen finito, pero un área infinita. Esto significa, por ejemplo, que se puede llenar con un volumen finito de líquido, pero para pintar su superficie haría falta una cantidad infinita de pintura.

Ejercicios

Ejercicio 1.7.1: Evaluar las siguientes integrales impropias o mostrar que divergen.

- | | | |
|--|---|---|
| a. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}.$ | h. $\int_{-3}^0 \frac{x dx}{(x^2-4)^{2/3}}.$ | ñ. $\int_{-3}^0 \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}} dx.$ |
| b. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ | i. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx.$ | o. $\int_{-3}^3 \frac{x dx}{\sqrt{-x^2+9}}.$ |
| c. $\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx.$ | j. $\int_0^1 \ln(x) dx.$ | p. $\int_0^{\ln(3)} \frac{dx}{e^{2x}-9}.$ |
| d. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx.$ | k. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{4/3}} dx.$ | q. $\int_{-6}^3 \frac{e^x dx}{e^{2x}-10e^x+9}.$ |
| e. $\int_{-3}^2 \frac{1}{x^4} dx.$ | l. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x-2}.$ | r. $\int_{\ln(2)}^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-4}} dx.$ |
| f. $\int_{-1}^{27} x^{-2/3} dx.$ | m. $\int_0^3 \frac{x dx}{x^2-9}.$ | s. $\int_0^1 \frac{dx}{x+x \ln(2x)}.$ |
| g. $\int_2^4 \frac{1}{(3-x)^{2/3}} dx.$ | n. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}} dx.$ | |

Ejercicio 1.7.2: Calcular, si convergen, las siguientes integrales impropias.

- | | | |
|---|--|---|
| a. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{2-x}.$ | e. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}.$ | h. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$ |
| b. $\int_1^{-\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}.$ | f. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ | i. $\int_0^{+\infty} 2 dt.$ |
| c. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$ | g. $\int_{-1}^8 x^{-1/3} dx.$ | j. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^{5/2}}.$ |
| d. $\int_{-\infty}^0 e^{-2t} dt.$ | | |

Ejercicio 1.7.3: Hallar $b \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^b \ln x \, dx = 0$.

Ejercicio 1.7.4: ¿Es impropia la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, dx$?

Ejercicio 1.7.5: Evaluar o mostrar que divergen las siguientes integrales impropias.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{3x}} \, dx.$

h. $\int_4^\infty x e^{-x^2} \, dx.$

ñ. $\int_{-4}^\infty \frac{e^x \, dx}{e^{2x} - 2e^x - 3}.$

b. $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2} \, dx.$

i. $\int_2^\infty \frac{x}{1+x^2} \, dx.$

o. $\int_1^\infty x^{-1,01} \, dx.$

c. $\int_2^\infty \frac{1}{(1-x)^{2/3}} \, dx.$

j. $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x} \, dx.$

p. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \, dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

d. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}.$

k. $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} \, dx.$

q. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(4+x^2)^2} \, dx.$

e. $\int_1^\infty e^x \, dx.$

l. $\int_2^\infty \frac{1}{x/\ln^2(x)} \, dx.$

r. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$

f. $\int_0^\infty x e^{-x} \, dx.$

m. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} \, dx.$

s. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{e^{|x|}} \, dx.$

g. $\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} \, dx.$

n. $\int_3^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \, dx.$

Ejercicio 1.7.6: Dar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente expresión resulte finita $\int_0^a \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2} \, dx$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este capítulo introducimos el concepto de ecuación diferencial como herramienta para modelar matemáticamente la realidad física que nos rodea. Mostramos algunas de las aplicaciones más sencillas de este concepto y explicamos la técnica de separación de variables que permite resolver estos simples ejemplos. Luego profundizamos en la ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, mostrando cómo resolverlas en el caso no homogéneo mediante la técnica de variación de constantes y damos algunos ejemplos de modelos matemáticos que utilizan estas ecuaciones. Finalizamos el capítulo con una introducción a un método numérico que nos permite aproximar la solución de una ecuación diferencial de primer orden sin necesidad de resolverla analíticamente.

2.1 Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra una función incógnita $y(x)$ y algunas de sus derivadas. Estas ecuaciones tienen aplicaciones muy importantes en diversas disciplinas, incluidas la ingeniería, física, química, economía y biología. En las aplicaciones, las funciones suelen representar magnitudes físicas, las derivadas tasas de cambio de estas magnitudes, y las ecuaciones diferenciales definen relaciones entre ellas.

El *orden* de una ecuación diferencial es, por definición, el de la derivada de mayor orden involucrada en la ecuación. En esta materia estudiaremos ecuaciones de primer orden y ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes y veremos ejemplos de aplicaciones concretas.

Las ecuaciones de primer orden que estudiaremos pueden escribirse de la siguiente forma:

$$y' = f(x, y).$$

Una solución de una ecuación diferencial en un intervalo I es una función $Y(x)$ derivable en I que satisface $Y'(x) = f(x, Y(x))$ para todo x en el intervalo.

Es muy sencillo verificar si una función propuesta $Y(x)$ es solución de la ecuación dada. Simplemente reemplazamos en la ecuación, derivamos donde corresponda y verificamos la igualdad. Al resolver una ecuación diferencial, recomendamos *siempre* verificar si la solución hallada es efectivamente solución de la ecuación con este método simple.

Ejemplo 2.1.1: Verificar la solución propuesta

Considerar la ecuación diferencial $y' = y \cos(x)$ y verificar que $y = Ce^{\sin(x)}$ es una solución, para cualquier valor de la constante $C \in \mathbb{R}$.

Resolución: Derivamos la función propuesta como solución:

$$y' = Ce^{\sin(x)} \cos(x).$$

Reemplazamos y e y' en la ecuación original y obtenemos

$$Ce^{\sin(x)} \cos(x) = Ce^{\sin(x)} \cos(x).$$

Ecuaciones de la forma $y' = f(x)$

Las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x)$ son las más sencillas. Resolverlas consiste en encontrar una primitiva de f . Si la función f es continua podemos integrar a ambos miembros de la igualdad, y obtener como solución

$$y = \int_a^x f(t) dt + C$$

donde C es una constante de integración indefinida. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo (ver 1.2.5) es sencillo verificar que estas integrales son soluciones de la ecuación original. Queda pendiente ver que son las únicas soluciones de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 2.1.2: Integrar

Resolver la ecuación diferencial $y' = \cos(x)$.

Resolución: Integrando en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\int y'(x) dx = \int \cos(x) dx.$$

$$y(x) = \text{sen}(x) + C.$$

Luego, las soluciones son $\text{sen}(x) + C$ para cualquier valor de la constante $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.3: Ecuación diferencial para las funciones exponenciales

Dado $r \in \mathbb{R}$, hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = r \cdot y$.

Resolución: Es fácil ver que las funciones de la forma $y(x) = A \cdot e^{rx}$ con $A \in \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación $y' = r \cdot y$. Veamos que son las únicas soluciones posibles.

Supongamos que $g(x)$ es una solución y consideremos la función $h(x) = g(x)e^{-rx}$. Si demostramos que h es una función constante, tendremos que $g(x) = A \cdot e^{rx}$. Dado que g es solución de la ecuación diferencial (es decir, que $g' = r \cdot g$), la usaremos para mostrar que h' es cero:

$$h'(x) = g'(x)e^{-rx} - r \cdot g(x)e^{-rx} = e^{-rx}(g'(x) - r \cdot g(x)) = 0.$$

Luego h es constante, ya que las funciones constantes son las únicas con derivada nula. Este resultado muestra que las soluciones de la ecuación $y' = r \cdot y$ son *exactamente* las funciones de la forma $A \cdot e^{rx}$.

Problemas de valores iniciales

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.4: Caída libre

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo. Supongamos que a tiempo $t_0 = 0$ la piedra parte de una altura $h(t_0) = 0$ y que su velocidad (en metros por segundo) desde que es lanzada hasta que vuelve a caer al piso está dada por la ecuación $v(t) = 8 - 2t$. Determinar la posición de la piedra en función del tiempo y calcular cuánto tiempo tarda en volver a caer al suelo.

Resolución: En física es sabido que la velocidad es la tasa de cambio de la posición. En símbolos esto se escribe como $v(t) = h'(t)$. Luego tenemos la ecuación diferencial

$$h'(t) = 8 - 2t.$$

Esta es una ecuación sencilla de resolver: integrando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$h(t) = 8t - t^2 + C.$$

Aquí C es una constante de integración arbitraria. La posición de la piedra queda determinada por una parábola descrita por $h(t)$. La constante de integración C puede determinarse sabiendo que la piedra es lanzada desde el piso en tiempo cero: $h(0) = 0$. Luego tenemos que $C = 0$ y que

$$h(t) = 8t - t^2.$$

Esta parábola tiene dos raíces: 0 y 8 con lo que concluimos que la piedra tarda 8 segundos en volver a caer al piso.

Por lo general, existen infinitas soluciones de una ecuación diferencial dada. Esto ocurriría en el ejemplo anterior: la ecuación $h'(t) = 8 - 2t$ tiene como soluciones a las ecuaciones $h(t) = 8t - t^2 + C$, para cualquier constante C . En las aplicaciones reales, los problemas con ecuaciones diferenciales suelen tener condiciones iniciales apropiadas que hacen que exista exactamente una solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales pedidas. Estos problemas se denominan *problemas de valores iniciales* (PVI).

Típicamente, junto a ecuaciones de primer orden suele haber una condición inicial de la forma $y(x_0) = y_0$ donde x_0 e y_0 son números reales dados en el enunciado.

Para resolver un problema de valores iniciales solemos hallar primero la solución general de la ecuación diferencial, que tendrá constantes libres a determinar, y luego determinamos los valores de las constantes que satisfacen la condición inicial pedida.

Ejemplo 2.1.5: Condición inicial

Sabiendo que la solución general de la ecuación diferencial $y' = y \cos(x)$ es $y(x) = ke^{\text{sen}(x)}$, hallar la única solución que satisface $y(0) = \sqrt{2}$.

Resolución: Nos falta determinar el valor de la constante k que satisfaga la condición inicial. Evaluando en 0, obtenemos $y(0) = ke^{\text{sen}(0)} = ke^0 = k$. Por lo tanto, la única solución que satisface la condición inicial dada tendrá $k = \sqrt{2}$ y la solución del PVI es

$$y(x) = \sqrt{2}e^{\text{sen}(x)}.$$

Ejemplo 2.1.6: Existencia y unicidad de las soluciones de un PVI

Probar que existe una única solución de la ecuación diferencial

$$y' = y$$

con condición inicial $y(0) = 1$.

Resolución: En el ejemplo 2.1.3 vimos que las soluciones de esta ecuación diferencial son exactamente las funciones de la forma

$$y(x) = A \cdot e^x.$$

Solo nos falta ver que hay una sola entre ellas que satisface la condición inicial $y(0) = 1$. Pero esto es sencillo. Si $A \cdot e^0 = 1$. Luego, $A = 1$ y la única solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial es $y(x) = e^x$.

Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden

Los dos ejemplos anteriores muestran casos en los que existe una y solo una solución a un problema de valores iniciales dado. Esto ocurre en general, como asegura el siguiente teorema, cuya demostración escapa al nivel de nuestro curso.

Teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden (2.1.7): Sea $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial con una función f continua y cuya derivada respecto a la segunda variable $\frac{\partial f}{\partial y}$ es también continua. Entonces, dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$ existe una única solución de la ecuación que satisface dicha condición inicial en un pequeño intervalo alrededor de x_0 .

Observación: Este pequeño intervalo alrededor de x_0 donde existe única solución del PVI puede extenderse hasta un único *intervalo maximal* de definición.

Ejemplo 2.1.8: Intervalo maximal

Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -\frac{1}{x^2}$ que satisfagan la condición inicial $y(1) = 2$ y dar el intervalo maximal de definición de la solución.

Resolución: Integrando a ambos lados obtenemos $y = \frac{1}{x} + C$. Evaluando en 1 y usando la condición inicial obtenemos $C = 1$. Luego la solución de la ecuación es $y = \frac{1}{x} + 1$. El intervalo donde está definida esta solución es la semirrecta $\mathbb{R}_{>0}$ y claramente no puede extenderse más.

Modelos de crecimiento o decrecimiento exponencial

El modelado matemático implica la observación detallada de la naturaleza y su medición precisa. Un antiguo ejemplo de modelación matemática fue llevado a cabo por *Eratóstenes de Cirene* hace más de dos mil años para calcular la medida de la tierra (ver Sarton 1965). Bajo hipótesis y simplificaciones adecuadas, Eratóstenes planteó un modelo matemático de nuestro planeta (supuestamente esférico) y de la forma en que a él llegan los rayos del sol (idealmente paralelos). Observando que al mediodía del solsticio de verano los cuerpos verticales no proyectaban sombra en Siena

y midiendo el ángulo de las sombras en ese mismo momento en Alejandría, logró deducir la diferencia de latitud entre las ciudades. Asumiendo que ambas ciudades estaban ubicadas sobre el mismo meridiano (es decir, una al sur de la otra) y midiendo la distancia entre ellas (esta tarea la realizó un bematistes, que era un experto en caminar con pasos iguales y contarlos), Eratóstenes estimó la longitud total del meridiano por medio de una regla de tres simple y con una precisión sorprendente. La proeza realizada por Eratóstenes, de todas formas, no radica principalmente en la precisión de su cálculo sino en el método empleado.

Hoy, tanto científicos como ingenieros utilizamos cotidianamente técnicas de modelación matemática para dar respuestas a preguntas sobre el mundo. El modelado matemático es una herramienta cada vez más importante. Requiere la simplificación de los problemas, de los que se modelan solo los aspectos más relevantes. El lenguaje de las ecuaciones diferenciales provee un marco adecuado para formular precisamente una serie de modelos que, junto con técnicas numéricas para su resolución, permiten el estudio de los más diversos fenómenos naturales. Con estas herramientas se modelan problemas relacionados con el cambio climático, con la dinámica de diferentes poblaciones, se diseñan perfiles aerodinámicos y se resuelven circuitos eléctricos, entre otras aplicaciones.

A continuación veremos algunos ejemplos sencillos de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales de la forma $y' = ry$.

Modelo de crecimiento poblacional: Si una población se reproduce de forma tal que la tasa crecimiento es proporcional a su tamaño, podemos plantear la siguiente ecuación diferencial que modela el tamaño de la población

$$y'(t) = r \cdot y(t).$$

En este contexto, r se denomina el *potencial biótico* de la población. Como vimos anteriormente, las soluciones de esta ecuación son de la forma Ae^{rt} . Este modelo asume que no hay restricciones al crecimiento. El resultado es un crecimiento exponencial de la población que no suele darse de forma indeterminada. El modelo planteado puede utilizarse en ciertos períodos acotados.

Ejemplo 2.1.9: Modelo de crecimiento poblacional irrestricto

Supongamos que tenemos para $t = 0$ un gramo de una población de bacterias $y(t)$ que duplica su peso cada hora. Plantear y resolver la ecuación diferencial que modela su peso, determinando el potencial biótico de la población.

Resolución: Supongamos que el modelo satisface la ecuación $y' = r \cdot y$ y determinemos r sabiendo que la población duplica su peso cada hora.

Tenemos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = r \cdot y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación diferencial son de la forma $y(t) = A e^{rt}$, en donde A es una constante que depende de las condiciones iniciales y r es el potencial biótico. Como $y(0) = A$, obtenemos inmediatamente $A = 1$. Falta determinar r . Sabemos que $y(1) = 2$ ya que la población duplica su peso cada hora. Por otra parte, $y(t) = A e^{rt}$. Luego, $e^r = 2$ de donde el potencial biótico es $r = \ln(2)$ y la solución al problema es $y(t) = e^{\ln(2)t} = 2^t$.

Modelo de desintegración radioactiva: La masa de un material radiactivo decrece proporcionalmente a su peso, dando lugar a un modelo basado en la ecuación $y'(t) = r \cdot y(t)$. En este caso, la constante r será negativa, ya que el peso disminuye con el tiempo.

Una forma de medir la velocidad a la que desintegra un material es mediante la semivida o *vida media* del material, que es el número de años requeridos para reducir el peso de la muestra radiactiva a la mitad.

Ejemplo 2.1.10: Modelo de desintegración radioactiva

La vida media del Plutonio (Pu-239) es 24100 años. Se sabe además que la tasa de desintegración radioactiva es proporcional a la cantidad de material restante. Si 10 gramos del isótopo Pu-239 se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl, plantear la ecuación diferencial que modela la evolución temporal de su peso y resolverla. ¿Cuánto

tiempo tomará a los 10 gramos disminuir 1 gramo?

Resolución: La ecuación que gobierna este modelo es $y' = r \cdot y$. Además la condición inicial es $y(0) = 10$. Las soluciones de este PVI son de la forma $y(t) = C e^{rt}$. Como $y(0) = 10$, deducimos que $C = 10$. Nos falta encontrar r . Usando que la vida media del material es de 24100 años, tenemos que $y(24100) = 10 e^{r24100} = 5$. Despejando, el valor de la constante es

$$r = \frac{-\ln(2)}{24100} \simeq -0,000029.$$

Finalmente, si buscamos t tal que $y(t) = 9$ para responder a la última pregunta obtenemos

$$e^{rt} = \frac{9}{10}.$$

El tiempo que tardará en disminuir un gramo del isótopo Pu-239 es

$$t = \frac{\ln(\frac{9}{10})}{r} = -\frac{\ln(\frac{9}{10})}{\frac{\ln(2)}{24100}} \simeq 3663,27 \text{ años.}$$

Ejercicios

Ejercicio 2.1.1: En cada caso, verificar que la función dada es una solución de la ecuación diferencial correspondiente:

a. $xy' - 3y = 0$, $y = cx^3$.

b. $xy' - 3y = 3$, $y = cx^3 - 1$.

c. $yy' = -x$, $x^2 + y^2 = c$.

d. $xy' - 2y = 0$, $y = cx^2$.

e. $3y - \frac{3y'}{\cos x} = 0$, $3y - ce^{\sin x} = 0$.

f. $yy' - x = 0$, $x^2 - y^2 = c$.

g. $\sin(x)y = y' - \sin x$, $y = ke^{-\cos x} - 1$.

2.2 Ecuaciones de variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se llama de *variables separables* si puede escribirse de la forma

$$y' = F(y)G(x),$$

donde F y G son funciones continuas.

Si hay valores $a \in \mathbb{R}$ tales que $F(a) = 0$, entonces la función constante $y(x) = a$ es una solución de la ecuación diferencial. Queda en manos del lector la tarea de realizar la verificación correspondiente.

Para encontrar las soluciones restantes, supongamos que $y(x)$ es tal que $F(y(x))$ no se anula. Luego, dividiendo por $F(y)$ obtenemos

$$\frac{y'}{F(y)} = G(x).$$

Integrando respecto a x en ambos lados, queda

$$\int \frac{y'(x)}{F(y(x))} dx = \int G(x) dx.$$

Finalmente, realizando la sustitución $y = y(x)$ del lado izquierdo de la igualdad, obtenemos que $dy = y'(x) \cdot dx$ y

$$\int \frac{dy}{F(y)} = \int G(x) dx.$$

Buscando las primitivas, en muchos casos podemos despejar y y obtener una solución explícita.

Ejemplo 2.2.1: Variables separables

Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y' = y \cos(x)$.
2. $y' = (1 + y^2)3x^2$.
3. $y' = 24(2x - 6)^3 e^{-y}$

Resolución:

1. En este ejemplo, vemos fácilmente que la ecuación es de variables separables considerando (con las notaciones usadas previamente) $F(y) = y$ y $G(x) = \cos(x)$. La función $F(y)$ solo tiene un cero en $y = 0$ que será una solución de la ecuación. Las otras surgen de aplicar el método:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \cos(x) dx.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \operatorname{sen}(x) + C.$$

$$\ln(|y|) = \operatorname{sen}(x) + C.$$

$$|y| = e^{\operatorname{sen}(x)} e^C.$$

Como y tiene que ser continua y derivable en todo el intervalo I donde se busca la solución, concluimos que $y = e^C e^{\operatorname{sen}(x)}$ o bien $y = -e^C e^{\operatorname{sen}(x)}$. Por lo tanto, a las soluciones las podemos escribir como

$$y = A e^{\operatorname{sen}(x)}$$

donde A es una constante real arbitraria.

2. Debemos hallar las soluciones de $y' = (1 + y^2)3x^2$. Si tomamos las funciones $F(y) = 1 + y^2$ y $G(x) = 3x^2$, vemos que la ecuación es de variables separables. Como $F(y)$ no tiene ceros, podemos dividir la ecuación por $F(y)$ e integrar:

$$\int \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} dx = \int 3x^2 dx.$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = x^3 + C.$$

$$\operatorname{arc\,tg}(y) = x^3 + C.$$

Luego, la solución viene dada por

$$y = \operatorname{tg}(x^3 + C),$$

en donde C es una constante real arbitraria.

Observemos que esta solución no está definida en toda la recta.

3. Tenemos que encontrar las soluciones de $y' = 24(2x - 6)^3 e^{-y}$. Como queremos separar las variables y e^{-y} resulta positivo para cualquier y , reescribimos la ecuación diferencial del enunciado dividiendo por e^{-y} :

$$\frac{y'}{e^{-y}} = 24(2x - 6)^3$$

$$e^y y' = 24(2x - 6)^3.$$

Si integramos a ambos lados de la igualdad y realizamos la sustitución $y = y(x)$, obtenemos

$$\int e^y dy = \int 24(2x - 6)^3 dx.$$

Resolviendo las integrales, resulta que

$$e^y = 3(2x - 6)^4 + C.$$

Despejando la función y , concluimos que las soluciones de la ecuación son de la forma

$$y = \ln(3(2x - 6)^4 + C)$$

donde C es una constante.

Observemos que el dominio de la función solución depende de la constante C .

Ejemplo 2.2.2: Intervalo maximal

Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = (1 + y^2)3x^2$ con condición inicial $y(0) = 0$ y dar el intervalo maximal de definición de la solución.

Resolución: Como vimos antes, la solución general viene dada por $y = \text{tg}(x^3 + C)$. Como $\text{tg}(0) = 0$ obtenemos que $y = \text{tg}(x^3)$ satisface la condición inicial (esto vale tomando $C = 0$, o cualquier múltiplo

entero de π , pero a pesar de tener distintas constantes es siempre la misma función: la única solución). El intervalo donde está definida esta solución es $(-\sqrt[3]{\pi/2}, \sqrt[3]{\pi/2})$ y claramente no puede extenderse más.

Ecuación logística

El modelo logístico describe el crecimiento de poblaciones con recursos limitados. En el caso de plantas de un terrario estos recursos limitados pueden ser el agua, la luz, los nutrientes o el espacio para crecer, mientras que para una población de animales estos recursos pueden estar relacionados por ejemplo con la comida, el agua, o con el lugar de anidamiento, abrigo y reproducción. En el modelo logístico, el crecimiento resulta similar al exponencial cuando la población es pequeña pero se ralentiza a medida que la población crece, y se acerca asintóticamente a una población máxima denominada *capacidad de carga* del sistema.

Además de utilizarse para modelar crecimientos de poblaciones con recursos limitados, el modelo logístico permite modelar la propagación de rumores, la extensión de una innovación tecnológica o de una epidemia: al principio estas se propagan rápidamente, pero cuando el número de afectados es grande, es más difícil encontrar una persona que previamente no haya estado en contacto con la enfermedad, rumor o innovación.

La ecuación diferencial del modelo logístico utilizado para modelar el tamaño, $N(t)$, de una población con un *potencial biótico* $r > 0$ en un sistema con una *capacidad de carga* $K > 0$ es la siguiente

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right).$$

Observar que:

- Si N es pequeño $\frac{K-N}{K}$ es muy cercano a 1 y el crecimiento es similar al exponencial.
- Si N es cercano a K , $\frac{K-N}{K}$ es muy parecido a 0 y el crecimiento se estabiliza.
- Si N es mayor que K , $\frac{K-N}{K}$ es negativo, indicando un decrecimiento poblacional.

Ejemplo 2.2.3: Ecuación logística

En este ejemplo realizamos un análisis gráfico del campo de direcciones de la ecuación $\frac{dN}{dt} = N \left(\frac{1000-N}{1000} \right)$.

En la Figura 2.1 representamos solamente valores no negativos de N porque el tamaño de una población solo tiene sentido para valores no negativos.

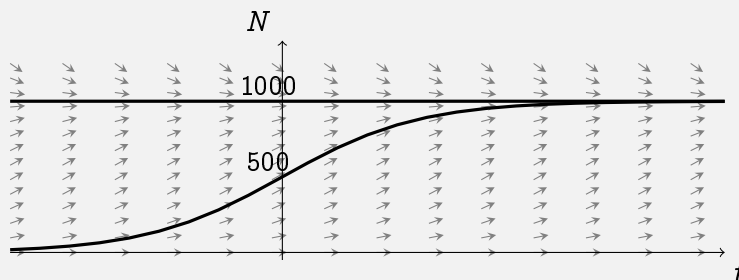


Figura 2.1: Campo de direcciones la ecuación diferencial.

Observemos que $N(t) = 0$ y $N(t) = 1000$ son soluciones constantes. Estas poblaciones permanecen en equilibrio. En el primer caso es un equilibrio inestable mientras que en el segundo es estable.

Notemos que casi todas las soluciones tienden a K cuando t tiende a infinito. Análogamente, muchas tienen una asíntota en 0 a la izquierda. Las pendientes son máximas para $N = 500$. Dejamos como ejercicio al lector probar esta última afirmación analíticamente.

No tenemos como objetivo estudiar campos de direcciones, para profundizar este tema sugerimos la lectura del Capítulo 9.2 del libro de Stewart (Stewart 2012).

Resolución general de la ecuación logística

Nos ocuparemos de encontrar la solución $N(t)$ de la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right)$$

que es de variables separables. Acomodando la expresión e integrando obtenemos

$$\int \frac{K dN}{N(K - N)} = \int r dt.$$

Usemos fracciones simples para reescribir el primer integrando:

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{K-N} = \frac{A_1 \cdot (K-N) + A_2 \cdot N}{N(K-N)},$$

de donde fácilmente vemos que $A_1 = A_2 = 1$. Reescribiendo e integrando obtenemos

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \right) dN = \int r dt$$

$$\ln(|N|) - \ln(|K-N|) = rt + C.$$

Cambiando los signos y luego aplicando las propiedades del logaritmo, la ecuación anterior es equivalente a:

$$\ln(|K-N|) - \ln(|N|) = -rt - C$$

$$\ln \left(\left| \frac{K-N}{N} \right| \right) = -rt - C$$

$$\left| \frac{K-N}{N} \right| = e^{-rt-C} = e^{-C} e^{-rt}$$

$$\frac{K-N}{N} = \pm e^{-C} e^{-rt}.$$

Tomando A una constante real cualquiera, escribimos la expresión anterior en una sola ecuación y luego despejamos la función $N(t)$:

$$\frac{K-N}{N} = Ae^{-rt}$$

$$\frac{K}{N} - 1 = Ae^{-rt}$$

$$\frac{K}{N} = 1 + Ae^{-rt}$$

$$\frac{N}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-rt}}$$

$$N = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

Además, si sabemos que la población inicial es $N(0) = N_0$ podemos dar el valor de la constante A de la siguiente forma:

$$A = \frac{K - N_0}{N_0}.$$

Ejemplo 2.2.4: Solución analítica de una ecuación logística.

Dar la solución de la ecuación logística con potencial biótico $r = 1$ y capacidad de carga $K = 1000$, como en el ejemplo 2.2.3, con condición inicial $N(0) = 100$.

Resolución: La ecuación logística es

$$\frac{dN}{dt} = N \left(\frac{1000 - N}{1000} \right),$$

y tiene como solución a la función

$$N = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

si consideramos $N(0) = 100$ obtenemos que $A = \frac{1000-100}{100} = 9$ y luego la solución analítica es

$$N = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}.$$

Ejemplo 2.2.5: Focas en Washington

Este ejemplo está inspirado en un artículo científico (Jeffries y col. 2003) que analiza la población de focas en Washington en el último cuarto del siglo XX. A principios del siglo XX en el estado de Washington se estimuló la caza de focas por que se creía que competían con los pescadores. En la década de los sesenta quedaban pocas focas. A fines de 1972 se prohibió la caza y a partir de 1973 la población comenzó a recuperarse.

Entre 1978 y 1999 se realizaron relevamientos aéreos anuales en condiciones de mareas bajas y al mediodía, para obtener conteos precisos de la población de focas. Estos 22 años de datos muestran que la población siguió un modelo logístico con capacidad de carga de $K = 11565$ focas y potencial biótico $r = 0,2$. La población en el primer conteo de 1978 era de 2570 focas. A partir de estos datos:

1. Escribir la ecuación diferencial que modela la población de focas tomando como año 0 el año 1978.
2. Escribir su solución.
3. Estimar la población de focas en 1973.
4. Estimar el año en que el crecimiento poblacional fue máximo.

Resolución:

1. Tenemos que $N_0 = 2570$ y la ecuación diferencial es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{5} \left(\frac{11565 - N}{11565} \right).$$

2. Recordemos que la solución general de la ecuación logística es

$$N = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

Como $A = (K - N_0)/N_0 = 3,5$, la solución en nuestro caso resulta

$$N = \frac{11565}{1 + 3,5e^{-\frac{t}{5}}}.$$

3. En particular, evaluando en el año -5 (que corresponde a 1973), obtenemos que la población era de aproximadamente $N(-5) = 1099,96 \sim 1100$ focas.
4. La ecuación diferencial que modela el problema es de la forma $N' = f(N)$ donde $f(N) = \frac{N}{5} \left(\frac{11565 - N}{11565} \right)$ es una función cuadrática cuyos ceros son 0 y 11565, por lo tanto el máximo valor de f lo encontramos en $N = 11565/2$. Es decir, el crecimiento poblacional de focas es máximo cuando la población está por la mitad de la capacidad de carga. Por lo tanto, tenemos que encontrar el tiempo t tal que $N(t) = 5782,5$.

$$N(t) = \frac{11565}{1 + 3,5e^{-\frac{t}{5}}} = 5782,5$$

$$2 = 1 + 3,5e^{-\frac{t}{5}}$$

$$\frac{1}{3,5} = e^{-\frac{t}{5}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{3,5}\right) = -\frac{t}{5}$$

$$t = 5 \ln(3,5) \simeq 6,264$$

Si $t = 0$ corresponde a 1978, $t = 6,264$ corresponde al año 1984, que es cuando se alcanza el máximo crecimiento poblacional de focas en Washington.

Ejercicios

Ejercicio 2.2.1: Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $y' = ky$.

g. $y' = (1+x)(1+y^2)$.

b. $y' = y^2$.

h. $yy' = \frac{1}{2} \sin^2(ax)$.

c. $y' - 2y + a = 0$.

i. $y' = \frac{2\sqrt{y-1}}{x} \quad (x < 0)$.

d. $xy' + ay = 0 \quad (x > 0)$.

j. $\sin(2x) dy = y \cos(2x) dx$.

e. $(x+2)y' = yx$.

k. $y' + e^{2x}y^2 = 0$.

f. $(1 - \cos(x)) dy = y \sin(x) dx$.

l. $x \log(x) dy = y dx \quad (x > 1)$.

Ejercicio 2.2.2: La razón de cambio relativa del número de carpinchos $N(t)$ en un humedal correntino es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Escribir la ecuación del modelo matemático y encontrar la población cuando $t = 3$.

Ejercicio 2.2.3: Una comisión de parques nacionales reintroduce 40 ciervos de los pantanos una zona de refugio en la que no quedaban ejemplares. Después de 5 años, la población, $p(t)$, alcanza los 104 individuos. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4000 ciervos de los pantanos y propone usar la ecuación logística para modelar la población

a lo largo del tiempo. Este modelo establece:

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(1 - \frac{p}{4000} \right), \quad 40 \leq p \leq 4000$$

donde t representa el número de años desde la reintroducción de los ciervos.

- Resolver la ecuación dando una fórmula para la población de ciervos en función del tiempo t .
- Usar el modelo para estimar la población de ciervos después de 15 años.
- Encontrar el límite de $p(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

2.3 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Las *ecuaciones diferenciales lineales de primer orden* son de la forma

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

en donde P y Q son funciones continuas. Para resolverlas, estudiaremos primero el caso de ecuaciones *homogéneas*, que son aquellas en donde $Q(x) = 0$, es decir que podemos escribirlas de la forma

$$y' = P(x)y.$$

Estas ecuaciones son de variables separables y por lo tanto pueden ser resueltas usando las técnicas de la sección anterior. Así, la solución general de una ecuación lineal homogénea viene dada por

$$\ln(|y|) = \int P(x) dx + C.$$

Otra manera, más sencilla, de escribir esta solución general es

$$y = Ae^{\int P(x) dx},$$

donde A es una constante real arbitraria.

En particular, las soluciones de una ecuación homogénea forman una recta en el espacio de funciones. Esto es lo que expresa el siguiente teorema.

Teorema (2.3.1): Si P es una función continua en el intervalo I , entonces existe al menos una solución y_1 no nula de la ecuación diferencial homogénea $y' = P(x)y$. Además, cualquier otra solución y_2 de la ecuación definida sobre el mismo intervalo es múltiplo de y_1 , es decir: existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $y_2 = A \cdot y_1$.

Ejemplo 2.3.2: Ecuación homogénea

Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1. \quad x^6 y' + y' - 6x^5 y = 0.$$

$$2. \quad y' - y = \ln(x)y$$

Resolución:

1. Para resolver la ecuación $x^6 y' + y' - 6x^5 y = 0$ debemos primero reescribir la ecuación de forma tal que quede explícita cuál es la función $P(x)$. Factorizando y acomodando tenemos

$$(x^6 + 1)y' = 6x^5 y$$

$$y' = \frac{6x^5}{x^6 + 1} y,$$

donde $P(x) = \frac{6x^5}{x^6 + 1}$.

Al igual que en el ejercicio anterior notemos que la función nula $y = 0$ es solución de la ecuación diferencial. Para encontrar las soluciones no triviales de la ecuación supondremos que y no es la función nula para poder dividir por y la ecuación y obtener

$$\frac{y'}{y} = \frac{6x^5}{x^6 + 1}.$$

Luego integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{6x^5}{x^6 + 1} dx.$$

Por un lado, recordemos que

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C.$$

Por el otro, para poder calcular la integral indefinida correspondiente al lado derecho de la igualdad debemos usar alguno de los

métodos de integración vistos en el capítulo anterior. En este caso sustituyendo $x^6 + 1$ por z , tenemos que $dz = 6x^5 dx$ y

$$\int \frac{6x^5}{x^6 + 1} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C = \ln(x^6 + 1) + C.$$

Usando los resultados obtenidos y haciendo las cuentas necesarias, llegamos a las siguientes igualdades

$$\ln |y| = \ln(x^6 + 1) + C.$$

$$|y| = e^{\ln(x^6 + 1) + C}$$

$$|y| = e^C e^{\ln(x^6 + 1)}$$

$$|y| = e^C (x^6 + 1).$$

Si despejamos la función derivable y , entonces $y = e^C(x^6 + 1)$ ó $y = -e^C(x^6 + 1)$. Concluimos que las soluciones de la ecuación resultan ser de la forma $y = A(x^6 + 1)$ con $A \in \mathbb{R}$.

2. Veamos que la ecuación $y' - y = \ln(x)y$ es de variables separables para poder usar el método de separación de variables. Reescribiendo la ecuación, obtenemos las siguientes igualdades:

$$y' = \ln(x)y + y$$

$$y' = (\ln(x) + 1)y.$$

La función nula $y = 0$ es solución de la ecuación. Si y no es la solución trivial de la ecuación homogénea, podemos reescribir la ecuación del siguiente modo:

$$\frac{y'}{y} = \ln(x) + 1$$

e integrando tenemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int [\ln(x) + 1] dx.$$

Recordemos que una primitiva de $\ln(x)$ es $x \ln(x) - x$ (ver ejemplo 2). Si integramos, la igualdad anterior es equivalente a

$$\ln |y| = x \ln(x) - x + x + C.$$

$$|y| = e^{x \ln(x) + C} = e^{\ln(x^x) + C} = e^C e^{\ln(x^x)} = e^C x^x.$$

Como y debe ser derivable, resulta que $y = e^C x^x$ ó $y = -e^C x^x$.

Finalmente podemos concluir que las soluciones de la ecuación diferencial son $y = Ax^x$ con $A \in \mathbb{R}$. Observemos que el dominio de x^x es $(0; +\infty)$, luego las soluciones no triviales de la ecuación diferencial tienen como dominio dicho intervalo.

Método de variación de constantes

El objetivo de esta sección es resolver las ecuaciones lineales de primer orden *no homogéneas* $y' = P(x)y + Q(x)$ por medio del *método de variación de constantes*. Este es un método general ideado por Lagrange para resolver ecuaciones diferenciales lineales en general y no solo las de primer orden.

Las soluciones de estas ecuaciones forman rectas en el espacio de funciones. Si se trata de ecuaciones homogéneas, serán rectas que pasen por el origen, es decir $y = 0$ será solución de la ecuación diferencial. Si la ecuación no es homogénea esta recta no pasará por el origen.

Llamamos ecuación *homogénea asociada* de $y' = P(x)y + Q(x)$ a la ecuación $y' = P(x)y$.

Observación: Si y_1 e y_2 son dos soluciones cualesquiera de la ecuación lineal de primer orden $y' = P(x)y + Q(x)$, entonces $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea asociada. Para probarlo simplemente tomemos $y_H = y_1 - y_2$ y reemplacemos en la ecuación homogénea $y' = P(x)y$, usando que tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación no homogénea:

$$[y_1 - y_2]' = y_1' - y_2' = [P(x)y_1 + Q(x)] - [P(x)y_2 + Q(x)] = P(x)(y_1 - y_2).$$

Así, obtenemos $y_H' = P(x)y_H$. Es decir, que y_H es solución de la ecuación homogénea.

Concluimos que todas las soluciones de la ecuación $y' = P(x)y + Q(x)$ son de la forma $A \cdot y_H + y_P$ con A un número real, y_P una solución particular de la ecuación e y_H una solución no nula de la ecuación homogénea asociada.

Siguiendo con la analogía geométrica anterior, las soluciones de una ecuación no homogénea $y' = P(x)y + Q(x)$ forman una recta en el espacio de funciones. Por su parte, las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y' = P(x)y$ forman otra recta. Esta segunda recta pasa por el origen. La observación anterior muestra que ambas rectas son paralelas.

Esto significa que, para resolver la ecuación $y' = P(x)y + Q(x)$, podemos resolver primero la ecuación homogénea asociada $y' = P(x)y$ usando el método de separación de variables y tomar y_H una solución no trivial de esta.

El método de variación de constantes consistirá en buscar una función $A(x)$ satisfaciendo que la función $y_P = A(x) \cdot y_H$ sea solución particular de la ecuación no homogénea.

Finalmente obtendremos que todas las soluciones son $y = A \cdot y_H + y_P$ con $A \in \mathbb{R}$.

Resumiendo, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Hallar una solución no trivial, y_H , de la ecuación homogénea asociada $y' = P(x)y$.
2. Definir una solución particular, y_P de la forma $A(x) \cdot y_H$.
3. Reemplazar y_P en la ecuación no homogénea y despejar $A(x)$. Elegir una entre todas las posibles $A(x)$.
4. Sustituir la función $A(x)$ hallada en la expresión de y_P para obtener una solución particular.
5. Escribir la solución general como $y = A \cdot y_H + y_P$ con $A \in \mathbb{R}$.

A continuación aplicaremos este método en algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.3: Ecuación no homogénea

Hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales

1. $y' = y \cos(x) + \cos(x)$.
2. $x^6 y' + y' - 6x^5 y = 3x^2(x^6 + 1)$.

$$3. \quad y' - y = \ln(x)y + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

Resolución:

1. La solución de la ecuación homogénea asociada ($y' = y \cos(x)$) ya fue encontrada anteriormente (ver ejemplo 2.2.1): $y_H = Ae^{\sin(x)}$. Proponemos como una solución particular de la ecuación no homogénea a

$$y_P = A(x)e^{\sin(x)}$$

y la reemplazamos para encontrar la función $A(x)$:

$$A'(x)e^{\sin(x)} + A(x)e^{\sin(x)}\cos(x) = A(x)e^{\sin(x)}\cos(x) + \cos(x).$$

Dentro de esta expresión, cancelamos la parte que corresponde a la ecuación homogénea:

$$A'(x)e^{\sin(x)} = \cos(x).$$

$$A'(x) = \cos(x)e^{-\sin(x)}.$$

Integrando por sustitución ($u = \sin(x)$), obtenemos

$$A(x) = -e^{-\sin(x)} + C.$$

Elegimos una solución entre todas (generalmente tomamos $C = 0$):

$$A(x) = -e^{-\sin(x)}.$$

Así, la solución particular que hallamos es

$$y_P = A(x)e^{\sin(x)} = -e^{-\sin(x)}e^{\sin(x)} = -1.$$

Recordemos que es recomendable verificar que $y_P = -1$ sea efectivamente una solución reemplazando en la ecuación original. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial son $y = Ae^{\sin(x)} - 1$.

2. Antes de usar el método para hallar una solución particular de la ecuación diferencial, la reescribimos de modo que resulte evidente que es una ecuación de la forma $y' = P(x) \cdot y + Q(x)$:

$$x^6 y' + y' - 6x^5 y = 3x^2(x^6 + 1)$$

$$(x^6 + 1)y' = 6x^5y + 3x^2(x^6 + 1)$$

$$y' = \frac{6x^5y + 3x^2(x^6 + 1)}{x^6 + 1}$$

$$y' = \frac{6x^5}{x^6 + 1}y + \frac{3x^2(x^6 + 1)}{x^6 + 1}$$

$$y' = \frac{6x^5}{x^6 + 1}y + 3x^2.$$

Notemos que la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial resulta ser

$$y' = \frac{6x^5}{x^6 + 1}y$$

cuyas soluciones son $y = A \cdot x^6 + 1$ ya que la hemos resuelto en el ejemplo de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (ver ejemplo 2.3.2). Luego consideramos $y_H = x^6 + 1$.

Proponemos como solución particular $y_P = A(x)(x^6 + 1)$ y buscamos la función $A(x)$ de manera que y_P sea solución de la ecuación. Si reemplazamos en la ecuación reescrita y acomodamos tenemos las siguientes igualdades

$$y'_P = \frac{6x^5}{x^6 + 1}y_P + 3x^2$$

$$[A(x)(x^6 + 1)]' = \frac{6x^5}{x^6 + 1}A(x)(x^6 + 1) + 3x^2$$

$$A'(x)(x^6 + 1) + A(x)6x^5 = 6x^5A(x) + 3x^2$$

$$A'(x)(x^6 + 1) = 3x^2$$

$$A'(x) = \frac{3x^2}{x^6 + 1}.$$

Integrando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\int A'(x)dx = \int \frac{3x^2}{x^6 + 1}dx.$$

Calculamos primero la integral del lado derecho de la igualdad. Observemos que $x^6 = (x^3)^2$, luego si usamos esa igualdad podemos reescribir la integral de modo que sea más explícito el método

que usaremos para resolverla:

$$\int \frac{3x^2}{x^6 + 1} dx = \int \frac{3x^2}{(x^3)^2 + 1} dx.$$

Utilizando el método de sustitución, tomamos $z = (x^3)^2$ y obtenemos $dz = 3x^2 dx$ y

$$\int \frac{3x^2}{(x^3)^2 + 1} dx = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \arctan(z) + C = \arctan(x^3) + C.$$

Luego, si volvemos a la igualdad de integrales, tenemos que

$$A(x) = \arctan(x^3) + C$$

y por lo tanto $y_P = \arctan(x^3)(x^6 + 1)$.

Finalmente las todas soluciones de la ecuación diferencial son de la forma

$$y = A(x^6 + 1) + \arctan(x^3)(x^6 + 1) \text{ con } A \in \mathbb{R}.$$

3. Comenzamos reescribiendo la ecuación de forma tal que resulte más explícito que es una ecuación lineal no homogénea de primer orden:

$$y' = \ln(x)y + y + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$y' = (\ln(x) + 1)y + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x.$$

Entonces la ecuación homogénea asociada es $y' = (\ln(x) + 1)y$ y, como habíamos concluido anteriormente (ver ejemplo 2.3.2), sus soluciones son $y_H = A \cdot x^x$ con $A \in \mathbb{R}$. Luego, para encontrar una solución particular buscaremos una función $A(x)$ de modo que $y_P = A(x)x^x$ sea solución de la ecuación

$$y' = (\ln(x) + 1)y + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x.$$

Recordemos que $x^x = e^{\ln(x^x)}$, por lo tanto

$$[x^x]' = [e^{\ln(x^x)}]' = [e^{x \ln(x)}]' = e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1) = x^x (\ln(x) + 1).$$

Si reemplazamos y_P , obtenemos las siguientes igualdades:

$$y'_P = (\ln(x) + 1)y_P + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$[A(x)x^x]' = (\ln(x) + 1)A(x)x^x + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$A'(x)x^x + A(x)[x^x]' = (\ln(x) + 1)A(x)x^x + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$A'(x)x^x + A(x)x^x(\ln(x) + 1) = (\ln(x) + 1)A(x)x^x + \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$A'(x)x^x = \frac{\sqrt{x}}{x+1}x^x$$

$$A'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Al integrar, tenemos la igualdad

$$\int A'(x) dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

Para calcular la integral del miembro derecho, realizamos la sustitución $z = \sqrt{x}$, entonces $x = z^2$ y $dz = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ o equivalentemente $dx = 2z dz$. Reemplazando, resulta que vale

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{z}{z^2+1} 2z dz = 2 \int \frac{z^2}{z^2+1} dz =$$

$$= 2 \int \frac{z^2+1-1}{z^2+1} dz =$$

$$= 2 \int \left[\frac{z^2+1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+1} \right] dz =$$

$$= 2 \int \left[1 - \frac{1}{z^2+1} \right] dz =$$

$$= 2[z - \arctg(z)] + C = 2\sqrt{x} - 2\arctg(\sqrt{x}) + C.$$

Por lo tanto podemos elegir $A(x) = 2\sqrt{x} - 2\arctg(\sqrt{x})$.

La solución particular que encontramos es

$$y_P = [2\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x})] x^x.$$

Luego, las soluciones de la ecuación son

$$y = A \cdot x^x + [2\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x})] x^x \text{ con } A \in \mathbb{R}.$$

Modelos que involucran ecuaciones de primer orden

En este apartado veremos ejemplos de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a algunos modelos matemáticos.

Modelo de enfriamiento de Newton: La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un cuerpo en un medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el ambiente. Si notamos con $y(t)$ a la temperatura del cuerpo que queremos estudiar y suponemos que el ambiente tiene una temperatura conocida $a(t)$, entonces la ley de Newton puede escribirse como

$$y'(t) = k(y(t) - a(t))$$

donde k es una constante positiva que depende del cuerpo. Esta es una ecuación de primer orden, por lo que si conocemos la constante k y tenemos una condición inicial, la evolución de la temperatura del cuerpo quedará completamente determinada.

Ejemplo 2.3.4: Ley de Enfriamiento de Newton

Supongamos que una taza de café se coloca a 96 grados un instante $t = 0$ en una habitación que se mantiene a 24 grados y al cabo de cinco minutos se encuentra a 90 grados. Hallar la constante k para la taza de café y determinar en qué momento la taza llegará a los 70 grados para ser bebida en condiciones ideales.

Resolución: Observemos primero que la temperatura de la habitación es constantemente 24, luego $a(t) = 24$ y la ecuación que modela el problema es:

$$y'(t) = k(y(t) - 24).$$

Como la ecuación es de variables separables (ver sección 2.2) operamos como en el ejemplo 2.2.1. Despejamos e integramos a ambos miembros:

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - 24} dt = \int k dt.$$

La integral de la izquierda la resolvemos sustituyendo $z = y(t) - 24$ de donde resulta $dz = y'(t)dt$. Luego

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - 24} dt = \int \frac{1}{z} dz = \ln(|z|) + C = \ln(|y(t) - 24|) + C.$$

Por lo tanto tenemos que $\ln(|y(t) - 24|) + C = kt$, y despejando $y(t)$ resulta que la función es:

$$y(t) = Ae^{kt} + 24 \text{ donde } A \in \mathbb{R}.$$

Halleemos ahora el valor de k . Para eso recordemos que sabemos que la temperatura inicial es de 96 grados y que a los cinco minutos fue de 90 grados: $y(0) = 96$ y $y(5) = 90$.

Como $y(0) = 96$ deducimos que $A = 72$. Por otro lado, para encontrar el valor de k resolvemos:

$$72e^{5k} + 24 = 90$$

$$k = 1/5 \ln(11/12) = \ln\left((11/12)^{\frac{1}{5}}\right).$$

Como $e^{\ln\left((\frac{11}{12})^{\frac{1}{5}}\right)t} = e^{\ln\left((\frac{11}{12})^{\frac{t}{5}}\right)} = \left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{t}{5}}$ concluimos que

$$y(t) = 72 \left(\frac{11}{12}\right)^{\frac{t}{5}} + 24.$$

Para determinar en que momento la temperatura alcanzó los 70 grados, debemos determinar el t para el cual $y(t) = 70$. Despejando de $70 = 72 \sqrt[5]{\left(\frac{11}{12}\right)^t} + 24$ tenemos que el valor buscado es

$$t = \frac{5 \ln(23/36)}{\ln(11/12)} \sim 25,74518.$$

Modelo de crecimiento exponencial con cosecha: Vimos anteriormente el modelo de crecimiento exponencial, en el que una población se reproduce de forma tal que su crecimiento es proporcional a su tamaño. Consideremos ahora un modelo de crecimiento exponencial con cosecha, en el que la población estudiada está gobernada por la ecuación

$$y'(t) = r \cdot y(t) - c.$$

donde r es el potencial biótico de la población y c es la cantidad que se cosecha por unidad de tiempo.

Ejemplo 2.3.5: Crecimiento exponencial con cosecha

Si una población tiene un potencial biótico $r = 0,5$ y se cosechan 2 gramos por unidad de tiempo, calcular la evolución de la población si la población inicial es de 4 o de 6 gramos. ¿Qué ocurre si la población inicial pesa 3 gramos?

Resolución: La ecuación que modela la evolución de esta población es una ecuación lineal de primer orden no homogénea:

$$y'(t) = 0,5 \cdot y(t) - 2.$$

Para encontrar las soluciones de dicha ecuación, primero resolvemos su ecuación homogénea asociada:

$$y'(t) = 0,5y(t).$$

Sabemos que sus soluciones son $y_H(t) = Ae^{0,5t}$ con $A \in \mathbb{R}$, pues las hemos calculado anteriormente (ver ejemplo 2.3.2).

Nos falta dar con una solución particular de la ecuación no homogénea. La hallaremos aplicando el método de variación de constantes. Proponemos como solución particular a $y_P(t) = A(t)e^{0,5t}$. Luego su derivada cumple:

$$y'_P(t) = A'(t)e^{0,5t} + A(t)0,5e^{0,5t}.$$

Como y_P es una solución particular de la ecuación, debe cumplir:

$$y'_P = 0,5 \cdot y(t) - 2.$$

Análogamente, si reemplazamos y_P en la ecuación anterior, llegamos a que $A(t)$ debe cumplir las siguientes igualdades:

$$A'(t)e^{0,5t} + A(t)0,5e^{0,5t} = A(t)0,5e^{0,5t} - 2$$

$$A'(t)e^{0,5t} = -2$$

$$A'(t) = -2e^{-0,5t}$$

$$A(t) = \int -2e^{-0,5t} dt = 4e^{-0,5t} + C.$$

Dejamos en manos del lector verificar que esta última integral se calcula realizando la sustitución $z = -0,5t$. Luego elegimos como solución particular a

$$y_P = 4e^{-0,5t}e^{0,5t} = 4.$$

Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación diferencial no homogénea pueden escribirse de la siguiente manera:

$$y(t) = Ce^{0,5t} + 4.$$

Si la población inicial es de 6 gramos ($y(0) = 6$), la solución es

$$y(t) = 2e^{0,5t} + 4.$$

Si, en cambio, la población inicial es de 4 gramos, entonces $y(t) = 4$ para todo tiempo t y, por lo tanto, la población se mantiene constante a lo largo del tiempo.

Finalmente analicemos lo que ocurre si la población inicial es 3 gramos. En este caso, la solución del problema es $y(t) = -e^{0,5t} + 4$. Observemos que la población se extingue en el tiempo $t = 2\ln(4)$, pues $2\ln(4)$ es un cero de $y(t)$. Entonces, podemos afirmar que no resulta sustentable cosechar 2 gramos por unidad de tiempo con una población inicial de 3 gramos.

Finalmente daremos un ejemplo del *modelo de disolución química*. Las mezclas químicas también pueden modelarse utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. En estos modelos, típicamente tenemos un soluto disuelto en un solvente con cierta concentración conocida dentro de un tanque y una mezcla con otra concentración que ingresa al tanque. Suele

suponerse que la mezcla entre estas dos soluciones se realiza instantánea y completamente dentro del tanque y suele haber una salida de esta mezcla resultante a cierta velocidad.

Ejemplo 2.3.6: Disolución química

Supongamos que inicialmente un tanque contiene 100 litros de agua limpia y vertemos en él una disolución de sal en agua con una concentración de 1 gramo de sal por litro de agua y a una velocidad de 10 litros por segundo. Supongamos también que dejamos salir la misma cantidad de líquido, es decir, 10 litros por segundo. Dar la concentración de sal luego de 10 segundos. Calcular en qué momento la concentración de sal supera los 0,9 gramos por litro.

Resolución: Llamemos $S(t)$ a la ecuación que da la cantidad de sal en el tanque, medida en gramos, en el instante t .

La cantidad de sal entrante es 10 gramos por segundo, y la sal saliente es $\frac{1}{10}S(t)$ gramos por segundo. Luego podemos modelar la cantidad de sal en el tanque en el segundo t con la ecuación

$$S'(t) = 10 - \frac{1}{10}S(t)$$

con condición inicial $S(0) = 0$.

Sabemos que la ecuación homogénea asociada $S'(t) = -\frac{1}{10}S(t)$ tiene como solución general a $S(t) = Ae^{-t/10}$ (ver el ejemplo 2.3.2).

Aplicamos el método de variación de constantes para encontrar una solución particular de la forma $S_P(t) = A(t)e^{-t/10}$. Dejamos a mano del lector las cuentas para dar con la función $A(t) = 100e^{t/10}$, pues resultan análogas a las realizadas en el ejemplo anterior (2.3.5). Luego, una solución particular para la ecuación no homogénea es $S_P(t) = 100$.

La cantidad de sal en gramos por segundo está dada por la función $S(t) = 100 + Ae^{-t/10}$ que cumple con la condición inicial:

$$S(0) = 100 + Ae^0 = 0$$

$$100 + A = 0$$

$$A = -100.$$

Concluimos que la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t puede ser modelada por la función

$$S(t) = 100 - 100e^{-t/10}.$$

Para poder determinar la concentración de sal en el tanque a los 10 segundos, primero reemplazamos t por 10 en la fórmula de $S(t)$. Sabemos que a los 10 segundos la cantidad de sal en el tanque es de $S(10) = 100 - 100e^{-1} \sim 63,21$ gramos. Por lo tanto la concentración es aproximadamente $63,21/100 = 0,6321$ gramos por litro de agua. Para calcular el momento a partir del cual la concentración de sal será mayor a 0,9 gramos por litro de agua observemos que esto ocurrirá cuando haya 90 gramos de sal en los 100 litros de agua que tiene en total el tanque. Por lo tanto debemos encontrar los valores de t para los que se cumple

$$100 - 100e^{-t/10} > 90$$

$$-100e^{-t/10} > -10$$

$$e^{-t/10} < 0,1$$

$$t > -10 \cdot \ln(0,1) \sim 23,03.$$

Concluimos que a partir de los 23,03 segundos la concentración de sal en el tanque será mayor a 0,9 gramos por litro.

Para profundizar en los conceptos del modelado matemático recomendamos algunos capítulos de los libros cuyos títulos se encuentran en la bibliografía de estas notas. El Capítulo 8.6 del libro de Apostol (Apostol 1995) contiene diversos ejemplos de problemas físicos que pueden modelarse con ecuaciones diferenciales de primer orden, incluyendo algunos similares a los ejemplos expuestos en estas notas, así como problemas relacionados con cinemática y con circuitos eléctricos. El capítulo 9 del libro de Stewart (Stewart 2012) también tiene algunos ejemplos interesantes, en particular analiza el problema de la caída libre con rozamiento y trata las ecuaciones de Lotka-Volterra que modelan sistemas de crecimiento poblacional con un predador y una presa. Por último, el libro de Nagle (Nagle, Saff y Snider 2005) contiene también numerosos ejemplos.

Ejemplo 2.3.7: Ejercicios integradores de ecuaciones diferenciales

Resolveremos los ejercicios que siguen:

1. Sabiendo que $f(x) = 2e^{x^2}$ satisface la ecuación diferencial de primer orden $xy' - b(x)y = 0$, hallar $b(x)$ y dar la solución de $xy' - b(x)y = x^4$ cuyo gráfico pase por el punto $(0; 2)$.
2. Encontrar una función f derivable en $(0, +\infty)$ tal que $f(1) = 3$ y las rectas tangentes a su gráfico en cada punto de la forma $(x_0; f(x_0))$ pasen siempre por $(0; 2f(x_0))$.
3. Resolver el siguiente PVI y dar el dominio de la función solución:

$$\begin{cases} y^3 dy = \cosh(x) dx \\ y(0) = \sqrt[4]{3}. \end{cases}$$

4. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y no idénticamente nula que satisface

$$2f^3(x) = \int_0^x 3f(t) \frac{\cos(t)}{e + \sin t} dt + 16.$$

Calcular $f(0)$ y $f(x)$.

5. Hallar una función $f(x)$ derivable que satisfaga

$$\int_0^x f(t) 2t \cos(t^2 + 1) dt = \int_2^{x+2} f'(t - 2) dt - \int_1^{e^x} t e^{\sin(\ln^2(t) + 1)} dt.$$

Resolución:

1. Para encontrar la función $b(x)$ simplemente reemplacemos y por $2e^{x^2}$ en la ecuación $xy' - b(x)y = 0$ y despejemos $b(x)$:

$$x \left[e^{x^2} \right]' - b(x) e^{x^2} = 0$$

$$x e^{x^2} \cdot 2x - b(x) e^{x^2} = 0$$

$$2x^2 e^{x^2} = b(x) e^{x^2}$$

$$\frac{2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2}} = b(x)$$

$$2x^2 = b(x).$$

Por lo tanto, la función pedida es $b(x) = 2x^2$.

Para poder dar la solución de la ecuación diferencial que cumpla la condición inicial $y(0) = 2$, primero reemplazamos $b(x)$ por $2x^2$ en ella, con lo que obtenemos lo siguiente:

$$xy' - 2x^2 y = x^4.$$

Busquemos todas las soluciones de dicha ecuación diferencial. Notemos que en el enunciado se indica que $f(x) = 2e^{x^2}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Luego nos falta hallar una solución particular, que proponemos de la forma $y_P = A(x) \cdot 2e^{x^2}$, de modo que cumpla la ecuación:

$$x y'_P - 2x^2 y_P = x^4$$

$$x \left[A(x) 2e^{x^2} \right]' - 2x^2 A(x) 2e^{x^2} = x^4$$

$$x \left[A'(x) 2e^{x^2} + A(x) 2e^{x^2} 2x \right] - 2x^2 A(x) 2e^{x^2} = x^4$$

$$A'(x) 2xe^{x^2} + 4x^2 A(x) e^{x^2} - 4x^2 A(x) e^{x^2} = x^4$$

$$A'(x) 2xe^{x^2} = x^4$$

$$A'(x) = \frac{x^4}{2xe^{x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} x^3 e^{-x^2}$$

Integrando en ambos miembros tenemos

$$\int A'(x) dx = \int \frac{1}{2} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Para resolver la integral del lado derecho de la igualdad sustituimos $z = -x^2$, por lo tanto $dz = -2x \, dx$ y

$$\int \frac{1}{2} x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int (-z) e^z \left(-\frac{1}{2}\right) dz = \frac{1}{4} \int z e^z \, dz.$$

Calculamos esta última integral usando el método de integración por partes. Elegimos $u(z) = z$ y $v'(z) = e^z$, luego $u'(z) = 1$, $v(z) = e^z$ y valen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int z e^z \, dz &= \frac{1}{4} \left(z e^z - \int e^z \, dz \right) = \\ &= \frac{1}{4} (z e^z - e^z) + C = \frac{e^z}{4} (z - 1) + C. \end{aligned}$$

Si reemplazamos z por $-x^2$ y tomamos $C = 0$, obtenemos que

$$A(x) = -\frac{e^{-x^2}}{4} (x^2 + 1).$$

Por lo tanto, la solución particular que encontramos es

$$y_P = -\frac{e^{-x^2}}{4} (x^2 + 1) \cdot 2e^{x^2} = -\frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

y a las soluciones de la ecuación no homogénea las podemos escribir de la forma:

$$y = A \cdot 2e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) \text{ con } A \in \mathbb{R}.$$

Para finalizar encontremos A de manera que la solución

$$y = A \cdot 2e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

cumpla con la condición inicial:

$$\begin{aligned} y(0) &= A \cdot 2e^{0^2} - \frac{1}{2} (0^2 + 1) \\ 2 &= 2A - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{5}{4} = A.$$

Concluimos que la solución de la ecuación $xy' - 2x^2y = x^4$ cuyo gráfico pasa por el punto $(0; 2)$ es la dada por la ecuación

$$y = \frac{5}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

2. Debemos hallar una función $f(x)$ derivable en $(0, +\infty)$, cuyas rectas tangentes a su gráfico en $(x_0; f(x_0))$ pasan por el punto $(0; 2f(x_0))$ y además cumpla que $f(1) = 3$. Veamos que debemos resolver un PVI.

Recordemos que la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0; f(x_0))$ tiene ecuación $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Por otro lado, $(0; 2f(x_0))$ es un punto por el que pasa dicha recta, es decir que debe cumplir la ecuación de esta. Luego la función pedida cumple, para todo x_0 , la siguiente ecuación diferencial:

$$2f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0),$$

que podemos reescribirla del siguiente modo:

$$x_0 \cdot f'(x_0) = -f(x_0).$$

Si usamos la notación usual ($y = f(x_0)$), afirmamos que debemos resolver el PVI:

$$x \cdot y' = -y \text{ con } y(1) = 3.$$

Notemos que y no es la función nula, ya que $y(1) = 3$. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$xy' = -y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + C$$

$$\ln |y| = \ln(|x|^{-1}) + C$$

$$|y| = e^{\ln(\frac{1}{|x|}) + C}$$

$$|y| = e^C \frac{1}{|x|}.$$

Como debemos resolver el PVI en $(0, +\infty)$ y $|x| = x$ si $x > 0$, afirmamos que existe algún $A \in \mathbb{R}$ de modo que la función que buscamos está dada por:

$$f(x) = \frac{A}{x}.$$

Para hallar tal A , recordemos que la función debe cumplir la condición inicial y resolvemos la ecuación:

$$f(1) = 3$$

$$\frac{A}{1} = 3.$$

Por lo tanto, la función que resuelve el problema es

$$f(x) = \frac{3}{x}.$$

3. Para resolver el PVI

$$\begin{cases} y^3 dy = \cosh(x) dx \\ y(0) = \sqrt[4]{3}, \end{cases}$$

primero resolvemos la ecuación diferencial $y^3 dy = \cosh(x) dx$. Integramos a ambos lados de la igualdad y usamos la tabla de primitivas pues ambas integrales son inmediatas

$$\int y^3 dy = \int \cosh(x) dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \sinh(x) + C$$

$$y^4 = 4(\sinh(x) + C)$$

$$y^4 = 4 \sinh(x) + k$$

La función y es derivable, por lo que y es continua en su dominio. Luego tenemos que

$$y = \sqrt[4]{4 \sinh(x) + k} \text{ ó } y = -\sqrt[4]{4 \sinh(x) + k}$$

para algún $k \in \mathbb{R}$ de modo que la función y verifique la condición inicial.

Recordemos que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, por lo tanto $\sinh(0) = 0$.

Como la condición inicial es $y(0) = \sqrt[4]{3} > 0$, claramente la solución es

$$y = \sqrt[4]{4 \sinh(x) + k}.$$

Usamos la condición inicial para obtener la constante k :

$$y(0) = \sqrt[4]{4 \sinh(0) + k}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{0 + k}$$

$$3 = k.$$

Concluimos que la solución del PVI es $y = \sqrt[4]{4 \sinh(x) + 3}$.

Para dar el dominio de la función solución debemos resolver la inecuación

$$4 \sinh(x) + 3 \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\sinh(x) \geq -\frac{3}{4}.$$

Recordemos que la derivada del seno hiperbólico es

$$[\sinh(x)]' = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

que resulta positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $\sinh(x)$ es estrictamente creciente.

Por otro lado, notemos que

$$\sinh(-\ln(2)) = \frac{e^{-\ln(2)} - e^{\ln(2)}}{2} = \frac{e^{\ln(2^{-1})} - 2}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Podemos concluir que $[-\ln(2), +\infty)$ es el conjunto solución de la inecuación $\sinh(x) \geq -3/4$ y, como consecuencia que el dominio de la función solución del PVI es $[-\ln(2), +\infty)$.

4. En este ejercicio debemos dar el valor de $f(0)$ y la fórmula de $f(x)$, sabiendo que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple la ecuación

$$2f^3(x) = \int_0^x 3f(t) \frac{\cos(t)}{e + \operatorname{sen} t} dt + 16.$$

En el primer caso alcanza con evaluar la ecuación en 0:

$$2f^3(0) = \int_0^0 3f(t) \frac{\cos(t)}{e + \operatorname{sen} t} dt + 16$$

$$2f^3(0) = 16$$

$$f(0) = 2.$$

Para encontrar f , plantearemos una ecuación diferencial que resulte equivalente a la dada. Observemos primero que f es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, cumple las condiciones del Teorema fundamental del cálculo (ver 1.2.5) y, como consecuencia, la función integral resulta derivable. Derivamos a ambos lados de la igualdad (no nos olvidemos de usar la regla de la cadena) y obtenemos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} 6f^2(x)f'(x) = 3f(x) \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x} \\ f(0) = 2. \end{cases}$$

Observemos que f no es la función nula y que podemos reescribir la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{6f^2(x)f'(x)}{3f(x)} = \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x}$$

$$2f(x)f'(x) = \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x}.$$

Si primero reemplazamos $f(x)$ por y y después integramos, tenemos

$$\int 2y dy = \int \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x} dx$$

$$y^2 = \int \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x} dx.$$

Para resolver la integral del lado derecho de la igualdad realizamos la sustitución $z = e + \operatorname{sen} x$, luego $dz = \cos(x) dx$ y

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{e + \operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C = \\ &= \ln |e + \operatorname{sen}(x)| + C = \ln(e + \operatorname{sen}(x)) + C.\end{aligned}$$

Es conveniente notar que la última igualdad se debe a que la función $e + \operatorname{sen}(x)$ solo toma valores positivos.

Podemos concluir que f cumple la ecuación

$$[f(x)]^2 = \ln(e + \operatorname{sen}(x)) + C.$$

Además $f(0) = 2 > 0$, entonces la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$f(x) = \sqrt{\ln(e + \operatorname{sen}(x)) + C}.$$

Busquemos el valor de C para que f cumpla la condición inicial:

$$f(0) = \sqrt{\ln(e + \operatorname{sen}(0)) + C}$$

$$2 = \sqrt{C}$$

$$4 = C.$$

Finalmente, afirmamos que la función que tiene a $\mathbb{R}$ como dominio y que resuelve el PVI es

$$f(x) = \sqrt{\ln(e + \operatorname{sen}(x)) + 4}.$$

5. En este punto, debemos dar las funciones f que cumplan la ecuación:

$$\int_0^x f(t) 2t \cos(t^2 + 1) dt = \int_2^{x+2} f'(t - 2) dt - \int_1^{e^x} t e^{\operatorname{sen}(\ln^2(t) + 1)} dt.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, reescribimos la ecuación integral como una ecuación diferencial.

Como f es una función derivable, entonces es continua. Aplicamos el Teorema fundamental del cálculo (ver 1.2.5), derivamos a ambos lados de la igualdad y reescribimos la ecuación:

$$f(x)2x \cos(x^2 + 1) = f'(x + 2 - 2) - e^x e^{\operatorname{sen}(\ln^2(e^x)+1)} e^x$$

$$f(x)2x \cos(x^2 + 1) = f'(x) - e^{2x} e^{\operatorname{sen}([\ln(e^x)]^2+1)}$$

$$f(x)2x \cos(x^2 + 1) = f'(x) - e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}$$

$$f(x)2x \cos(x^2 + 1) + e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} = f'(x).$$

Si sustituimos $y = f(x)$, podemos ver que la ecuación lineal no homogénea que debemos resolver es

$$y' = 2x \cos(x^2 + 1)y + e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}.$$

Primero buscamos las soluciones no triviales de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = 2x \cos(x^2 + 1)y$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cos(x^2 + 1)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \cos(x^2 + 1) dx$$

$$\ln |y| = \int 2x \cos(x^2 + 1) dx.$$

Resolvemos la integral del lado derecho realizando la sustitución $z = x^2 + 1$, entonces $dz = 2x dx$ y

$$\int 2x \cos(x^2 + 1) dx = \int \cos(z) dz = \operatorname{sen}(z) + C = \operatorname{sen}(x^2 + 1) + C.$$

Reemplazamos en la ecuación anterior y despejamos la función y :

$$\ln |y| = \operatorname{sen}(x^2 + 1) + C$$

$$|y| = e^{\operatorname{sen}(x^2+1)+C}$$

$$y = \pm e^C e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}.$$

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada se pueden escribir de la siguiente forma:

$$y = A e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

A continuación proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea a la función:

$$y_P = A(x) e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}.$$

Si $y_H = e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada, entonces cumple

$$y'_H = 2x \cos(x^2 + 1) y_H.$$

A la solución particular la reescribimos como $y_P = A(x) y_H$ y la derivamos $y'_P = A'(x) y_H + A(x) y'_H$. Tenemos que encontrar una función $A(x)$ de modo que y_P cumpla la ecuación diferencial. Reemplazamos y_P e y'_P por lo que escribimos antes:

$$y'_P = 2x \cos(x^2 + 1) y_P + e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}$$

$$A'(x) y_H + A(x) y'_H = 2x \cos(x^2 + 1) A(x) y_H + e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}.$$

Como sabemos que $y'_H = 2x \cos(x^2 + 1) y_H$, la igualdad anterior es equivalente a

$$A'(x) y_H = e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}$$

$$A'(x) e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} = e^{2x} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}$$

$$A'(x) = e^{2x}.$$

$$A(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Una solución particular es

$$y_P = \frac{e^{2x}}{2} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)}.$$

Concluimos que la solución general de la ecuación original es

$$f(x) = A e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} + \frac{e^{2x}}{2} e^{\operatorname{sen}(x^2+1)} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios

Ejercicio 2.3.1: Dado el siguiente problema de valores iniciales en $\mathbb{R}$

$$xy' = 2y, \quad y(1) = 1$$

- Halle dos soluciones distintas del PVI.
- Describa todas las soluciones del PVI.
- Explique la falta de unicidad del problema.

Ejercicio 2.3.2: Hallar una solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ de manera que la recta tangente a su gráfico en el punto $(0; y(0))$ sea paralela a la recta $y = 3x$. ¿Es única?

Ejercicio 2.3.3: Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales:

- | | |
|---|--|
| a. $y' - y = 3$. | i. $y' + y = \operatorname{sen}(x)$. |
| b. $y' + 2xy = 0$. | j. $y' \operatorname{tg}(x) = y - 1$. |
| c. $y' + 2xy = x$. | k. $(1 - x^2)y' + xy = x$, si $0 < x < 1$. |
| d. $y' + 2y = 6e^x$. | l. $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$. |
| e. $xy' = y + (x + 1)^2$, si $x > 0$. | m. $y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$. |
| f. $xy' + y = x + x^3$, si $x > 0$. | n. $(2y - x^3)dx = xdy$, si $x > 0$. |
| g. $y' + ky = e^{-kx}$. | ñ. $y' - \frac{2y}{x} = x^2e^x$. |
| h. $(1 + x^2)dy + 2xydx = \cotg(x)dx$. | |

Ejercicio 2.3.4: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condición inicial:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a. $y' - \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$. | d. $y' - 2y = \cos(x)$, $y(0) = 2$. |
| b. $(x + 1)y' = 2y$, $y(0) = 1$. | e. $xy' - 3y = x^4$, $y(1) = -1$. |
| c. $y' = y \operatorname{tg}(2x)$, $y(0) = 2$. | f. $2xy' = 3y$, $y(1) = 4$. |

Ejercicio 2.3.5:

- Hallar $p(x)$ para que la función $y = \cos(x)$ sea solución de $y' + p(x) \cdot y = 0$. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?

- b. Hallar la solución general de $y' + p(x) \cdot y = e^x \cos^2(x)$ donde $p(x)$ es la función calculada en (1).

Ejercicio 2.3.6: Considerar la ecuación diferencial $y' - \cot g(x) \cdot y = f(x)$. Hallar $f(x)$ de manera que $y(x) = \text{sen}(x) \cdot [(x-1) \cdot e^x + 1]$ sea solución de la ecuación dada. Para la f hallada, buscar **todas** las soluciones de la ecuación diferencial original.

Ejercicio 2.3.7: Considerar la ecuación diferencial $y' + \frac{1}{x \ln x} y = f(x)$.

- a. Hallar la solución general de la ecuación homogénea asociada.
- b. Hallar f de manera tal que $y(x) = \frac{x^3}{\ln x}$ sea solución de la ecuación original.
- c. Para la f hallada en el ítem anterior, hallar la solución general de la ecuación diferencial y la solución particular que satisface $y(2) = 1$.

Ejercicio 2.3.8: Sea f una función derivable tal que para todo x real se satisfaga

$$e^{2x} f(x) = (x+1)^2 + 4 \int_0^x e^{2t} f(t) dt,$$

calcular $f(0)$ y encontrar $f(x)$.

Ejercicio 2.3.9: Considerar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por $L \frac{dI}{dt} + RI = E(t)$, donde L denota la inductancia, I la corriente eléctrica, R la resistencia y E el voltaje producido por la potencia.

- a. Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0 .
- b. Usar el resultado obtenido en (a) con el fin de encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente el 90 % de su valor limitante?

Ejercicio 2.3.10: Considere la ecuación diferencial $y' + \frac{a}{x} y = 2x^2$. Sabiendo que $y = x^3 + 2x$ es una solución, hallar la solución que pase por el punto $(1; 4)$.

Ejercicio 2.3.11: Sea $y(t)$ una solución del PVI $y' + 3by = e^{2t}$, $y(0) = 1$, que satisface que la recta tangente a la curva solución en $(0; 1)$ es horizontal. Hallar el valor de b y la solución.

Ejercicio 2.3.12: En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 2 gramos. El peso máximo del cultivo es de 10 gramos.

- Escribir la ecuación logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo bacteriano.
- Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.
- ¿Cuándo el peso del cultivo será de 8 gramos?
- ¿En qué tiempo t se incrementará el peso más rápidamente? Justificar.

Ejercicio 2.3.13: Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' - \frac{y}{x} = x$, $y(1) = 2$ y probar que la recta tangente al gráfico de la solución en el punto $(1; 2)$ es perpendicular a la recta $x + 3y = 0$ y pasa por el punto $(2; 5)$.

Ejercicio 2.3.14: Hallar las soluciones de la ecuación $xy'(x) - y(x) = 1$ cuyo gráfico sea perpendicular a la recta $2x + 2y = 4$ y pase por el punto $(1; 1)$.

2.4 Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

En las secciones anteriores hemos visto cómo resolver analíticamente algunas ecuaciones diferenciales de primer orden: las lineales y las de variables separables. Salvo que caiga entre estos casos y algunos más, resolver analíticamente una ecuación diferencial de primer orden arbitraria es prácticamente imposible. Sin embargo, el Teorema 2.1.7 de Existencia y Unicidad nos garantiza, bajo ciertas hipótesis muy generales, que la solución existe y es única. Al tener garantizada la existencia de una solución podemos usar métodos numéricos para aproximarla. En este apartado veremos el más sencillo de estos métodos, llamado método de Euler. En el curso métodos numéricos estudiarán métodos más refinados.

El *método de Euler* ofrece una aproximación a la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = F(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta aproximación se basa en que, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x)$, si h es pequeño

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \simeq y'(x)$$

o equivalentemente (recordando que $y' = F(x; y)$)

$$y(x + h) \simeq y(x) + h \cdot F(x; y(x)).$$

Luego, si conocemos el valor de $y(x_0)$ podemos usar la expresión anterior para aproximar el valor de $y(x_0 + h)$. Iterando esta idea podremos aproximar el valor de $y(x_0 + 2h)$ y así sucesivamente. Como la aproximación de $y(x_0 + (k + 1)h)$ se basa en la aproximación de $y(x_0 + kh)$, los errores tienen a incrementarse a medida que nos alejamos del punto x_0 .

Usualmente, si queremos aproximar el valor de la solución y de (2.1) en un intervalo $[a, b]$, tomamos un entero positivo n , y consideremos la partición de $[a, b]$ en subintervalos de ancho $h = \frac{b - a}{n}$ determinada por los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

El ancho de estos intervalos se denomina el *paso* del método de Euler.

Luego, aproximamos la solución $y(x)$ del PVI (2.1) en los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ de la siguiente manera:

$$y(x_1) \simeq y_1 = y(x_0) + h \cdot F(x_0; y(x_0)) = y_0 + h \cdot F(x_0; y_0)$$

$$y(x_2) \simeq y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1; y_1)$$

$$y(x_3) \simeq y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2; y_2)$$

$$\vdots$$

$$y(x_{k+1}) \simeq y_{k+1} = y_k + h \cdot F(x_k; y_k)$$

$$\vdots$$

$$y(x_n) \simeq y_n = y_{n-1} + h \cdot F(x_{n-1}; y_{n-1}).$$

Finalmente aproximamos la función solución y en todo el intervalo $[a, b]$ con una función lineal a trozos de modo que si $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $y(x)$ resulta ser el valor de la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(x_k; y_k)$ y $(x_{k+1}; y_{k+1})$ evaluada en x .

Resumiendo, la aproximación de la solución y del PVI (2.1) en x_{k+1} usando el método de Euler con *paso* $h > 0$ será

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot F(x_k; y_k) \quad \text{si } k \geq 0.$$

Bajo condiciones muy generales, a medida que el paso se hace más pequeño, la solución aproximada obtenida tiende a la solución exacta.

Para profundizar en este y otros métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, recomendamos consultar el libro de Nagle (Nagle, Saff y Snider 2005) o el capítulo 25 del libro de Chapra (Chapra y Canale 2007).

Ejemplo 2.4.1: Método de Euler

Dado el problema de valores iniciales $y' = x + y$ tal que $y(0) = 1$.

1. Encontrar solución exacta del PVI.
2. Calcular el valor de $y(1)$ utilizando el método de Euler con pasos $h = 0,2$, $h = 0,1$ y $h = 0,01$.
3. Hallar $y(x)$ para $0 \leq x \leq 1$ con el método de Euler con paso $h = 0,2$.
4. Graficar las soluciones halladas mediante el método de Euler con paso $h = 0,2$ y $h = 0,1$ y la solución exacta en un mismo gráfico.

Resolución:

1. Notemos que la ecuación es lineal no homogénea. La ecuación homogénea asociada es $y' = y$ y hemos visto que sus soluciones son $y = A \cdot e^x$ con $A \in \mathbb{R}$. Resolvamos la ecuación no homogénea $y' = x + y$ usando el método de variación de constantes. Para esto, buscamos una solución particular de la forma $A(x) \cdot e^x$. Reemplazando en la ecuación diferencial, obtenemos

$$[A(x) \cdot e^x]' = x + A(x) \cdot e^x$$

$$A'(x) \cdot e^x + A(x) \cdot e^x = x + A(x) \cdot e^x$$

$$A'(x) \cdot e^x = x$$

$$A'(x) = xe^{-x}$$

$$\int A'(x) dx = \int xe^{-x} dx.$$

Usando el método de integración por partes resulta que

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Por lo tanto $A(x) = -x e^{-x} - e^{-x}$ y la solución particular resulta ser

$$A(x) \cdot e^x = [-x e^{-x} - e^{-x}] \cdot e^x = -x - 1.$$

Podemos afirmar que las soluciones de la ecuación no homogénea $y' = x + y$ son $y = C e^x - x - 1$ con $C \in \mathbb{R}$. Falta determinar C . Para eso usamos la condición inicial:

$$y(0) = 1$$

$$C e^0 - 0 - 1 = 1$$

$$C = 2.$$

Por lo tanto la solución exacta del PVI es $y = 2 e^x - x - 1$. Observemos que $y(1) = 2 e - 2$ y si aproximamos resulta que $y(1) \simeq 3,43656$.

2. Vamos a usar el método de Euler con diferentes pasos para aproximar el valor de $y(1)$. Notemos que $F(x; y) = x + y$ y además $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Primero resolvemos en el caso de que el paso sea $h = 0,2$.

El valor aproximado de $y(x_1) = (x_0 + h) = y(0,2)$ es

$$y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0; y_0)$$

$$y_1 = 1 + 0,2(0 + 1)$$

$$y_1 = 1,2.$$

Luego $y(0,2) \simeq 1,2$.

Para $x_2 = x_1 + h = 0,4$, usaremos la aproximación $y(x_2) \simeq y_2$. Calculamos y_2 :

$$y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1; y_1)$$

$$y_2 = 1,2 + 0,2(0,2 + 1,2)$$

$$y_2 = 1,48.$$

Entonces $y(0,4) \simeq 1,48$.

Para $x_3 = x_2 + h = 0,6$, usamos $y(x_3) \simeq y_3$. Calculamos y_3 :

$$y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2; y_2)$$

$$y_3 = 1,48 + 0,2(0,4 + 1,48)$$

$$y_3 = 1,816.$$

Entonces $y(0,6) \simeq 1,816$.

Para $x_4 = x_3 + h = 0,8$, usamos $y(x_4) \simeq y_4$. Calculamos y_4 :

$$y_4 = y_3 + h \cdot F(x_3; y_3)$$

$$y_4 = 1,816 + 0,2(0,6 + 1,816)$$

$$y_4 = 2,2992.$$

Entonces $y(0,8) \simeq 2,2992$.

Para $x_5 = x_4 + h = 1$, usamos $y(x_5) \simeq y_5$. Calculamos y_5 :

$$y_5 = 2,2992 + h \cdot F(x_4; y_4)$$

$$y_5 = 2,2992 + 0,2(0,8 + 2,2992)$$

$$y_5 = 2,91904.$$

Entonces $y(1) \simeq 2,91904$.

Luego para $h = 0,2$ tenemos la siguiente tabla:

k	x_k	y_k
0	0	1
1	0,2	1,2
2	0,4	1,48
3	0,6	1,816
4	0,8	2,2992
5	1	2,91904

Si hacemos las mismas cuentas pero para $h = 0,1$ tenemos la tabla que sigue

k	x_k	y_k
0	0	1
1	0,1	1,1
2	0,2	1,22
3	0,3	1,362
4	0,4	1,5282
5	0,5	1,72102
6	0,6	1,943122
7	0,7	2,1974342
8	0,8	2,48717762
9	0,9	2,81589538
10	1	3,18748492

Luego $y(1) \simeq 3,18748492$. La Figura 2.2 presenta una comparación gráfica para paso $h = 0,1$ y $h = 0,2$.

Podemos programar un algoritmo que haga estas cuentas por nosotros, pasa cualquier paso dado. Así, usando el método de euler con $h = 0,01$, obtenemos que $y(1) \simeq y_{100} = 3,4096$.

- El método de Euler ofrece una aproximación de la solución de la ecuación diferencial en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$. En el interior de un intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ determinados por dos puntos sucesivos, la solución se aproxima por la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(x_k; y_k)$ y $(x_{k+1}; y_{k+1})$. Recordemos que la función lineal que pasa por los puntos $(x_k; y_k)$ y $(x_{k+1}; y_{k+1})$ tiene como ecuación

$$y(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) + y_k.$$

Por lo tanto, para $h = 0,2$ tenemos la siguiente función partida

$$y(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 0,2 \\ 1,4x + 0,92 & \text{si } 0,2 \leq x \leq 0,4 \\ 1,68x + 0,808 & \text{si } 0,4 \leq x \leq 0,6 \\ 2,416x + 0,3664 & \text{si } 0,6 \leq x \leq 0,8 \\ 3,0992x - 0,18016 & \text{si } 0,8 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

4. El gráfico que obtenemos es el de la Figura 2.2.

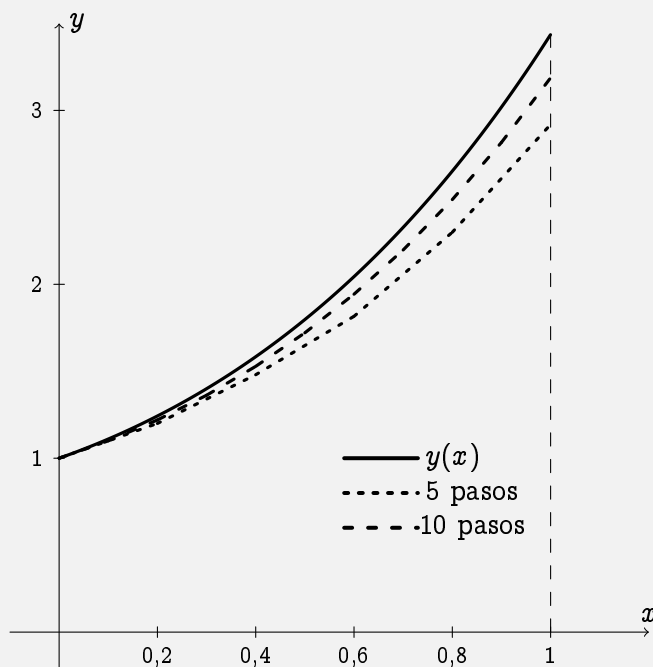


Figura 2.2: Comparación de la solución analítica $y(x)$ con dos soluciones numéricas obtenidas con diferentes pasos del método de Euler.

Ejemplo 2.4.2: Aproximación de la exponencial

Aproximar usando el método de Euler con n pasos la solución de la ecuación $y' = y$ que cumple $y(0) = 1$ en x . Mostrar que efectivamente si $n \rightarrow +\infty$ la solución obtenida con el método de Euler resulta la solución exacta del problema de valores iniciales.

Resolución: Recordemos que las soluciones de la ecuación $y' = y$ son de la forma $y = A \cdot e^x$. Si pedimos que valga la condición inicial, entonces $A = 1$. Por lo tanto la solución exacta del PVI es $y = e^x$.

Usaremos el método de Euler en el intervalo $[0, x]$ y lo partiremos en n intervalos de longitud $h = \frac{x - 0}{n} = \frac{x}{n}$.

Aplicando el método tenemos

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & y_0 &= 1 \\x_1 &= h, & y_1 &= y_0 + h \cdot y_0 = 1 + h \\x_2 &= 2h, & y_2 &= y_1 + h \cdot y_1 = (1 + h) + h(1 + h) = (1 + h)^2 \\x_3 &= 3h, & y_3 &= y_2 + h \cdot y_2 = (1 + h)^2 + h(1 + h)^2 = (1 + h)^3 \\&& \vdots & \\x_n &= nh, & y_n &= (1 + h)^n.\end{aligned}$$

Como $h = \frac{x}{n}$, entonces $x_n = nh = n\frac{x}{n} = x$ y, reemplazando, vale también

$$y(x) \simeq y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Observemos que si $n \rightarrow +\infty$, entonces $h \rightarrow 0$.

Calculamos el límite de y_n cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x.$$

Así hemos demostrado en este caso que, a medida que achicamos el paso h (o, lo que es lo mismo, partimos el intervalo $[0, x]$ en una mayor cantidad de intervalos) la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler tiende a la solución exacta.

Ejercicios

Ejercicio 2.4.1: Usar el método de Euler para obtener una solución aproximada de los siguientes problemas de valor inicial utilizando el paso h indicado en cada caso. Hacer una tabla con los valores obtenidos y comparar con los valores de la solución exacta.

- $y' = x + y$, $y(0) = 2$, $n = 5$, para $h = 0,2$ y para $h = 0,1$.
- $y' = y$, $y(0) = 3$, $n = 5$, para $h = 0,2$ y para $h = 0,1$.
- $y' = y + \cos(x)$, $y(0) = 0$, $n = 5$, para $h = 0,2$ y para $h = 0,1$.

Ejercicio 2.4.2: Repetir el inciso 2 del Ejercicio 2.3.12 utilizando el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con los resultados exactos.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes

En este capítulo introducimos un tipo especial de ecuaciones diferenciales de segundo orden: aquellas que tienen coeficientes constantes. A partir del concepto de polinomio característico de una ecuación diferencial, presentamos un método para resolver las ecuaciones homogéneas de este tipo y explicamos el método de los coeficientes indeterminados que nos permite resolver las ecuaciones no homogéneas en muchos casos de interés. También introducimos el modelo matemático del resorte basado en este tipo de ecuaciones diferenciales.

Las *ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes* son aquellas que pueden escribirse de la forma

$$y'' + Ay' + By = R(x) \tag{3.1}$$

donde A y B son números reales y $R(x)$ es una función. En la resolución de estas ecuaciones es propicio utilizar nociones y herramientas del álgebra lineal que escapan a los contenidos de la materia. Aun así enunciaremos algunos resultados utilizando esta terminología.

Al igual que con las ecuaciones lineales de primer orden, para hallar las soluciones de la ecuación (3.1), primero resolveremos la ecuación homogénea asociada, luego buscaremos una solución particular de la ecuación (3.1) y finalmente escribiremos a la solución general como la suma de las soluciones de la homogénea con una solución particular.

3.1 Ecuaciones homogéneas

En esta sección trabajaremos con *ecuaciones homogéneas*, es decir, ecuaciones de la forma

$$y'' + Ay' + By = 0. \quad (3.2)$$

A continuación resolveremos algunos casos particulares de esta ecuación para ilustrar el tipo de soluciones que admiten.

Ejemplo 3.1.1: Ecuaciones homogéneas, casos sencillos

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden encontrar dos soluciones que no sean una múltiplo de la otra. Si dos funciones cumplen con esta propiedad decimos que son *independientes*.

1. $y'' = 0$

3. $y'' + y = 0$

2. $y'' - 5y = 0$

4. $y'' + y' = 0$

Resolución:

1. Es claro que las funciones que tienen derivada segunda igual a cero son las funciones lineales. Esto es, las funciones de la forma $y(x) = C_1x + C_2$. El enunciado nos pide encontrar dos soluciones independientes. Proponemos como soluciones a las funciones $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 1$.

2. Esta ecuación puede reescribirse como $y'' = 5y$. Es decir que buscamos una función que si la derivamos dos veces da la misma función multiplicada por 5. Sabemos que las soluciones de $y' = ay$ son de la forma e^{ax} . Podemos entonces proponer aquí como solución a la función $y_1(x) = e^{\sqrt{5}x}$.

Es fácil verificar que $y_2(x) = e^{-\sqrt{5}x}$ también es solución de la ecuación, ya que $y_2''(x) = 5e^{-\sqrt{5}x}$.

Verifiquemos que y_1 e y_2 son independientes: para eso debemos ver que no es una múltiplo de la otra. Si lo fueran su cociente sería constante, pero $\frac{y_1}{y_2} = e^{2\sqrt{5}x}$ que no es constante. Por lo tanto estas dos funciones son, efectivamente, independientes.

3. Si reescribimos la ecuación de la forma $y'' = -y$ observamos que las soluciones de esta ecuación diferencial son las funciones que al ser derivadas dos veces dan la misma función cambiada de signo. Conocemos dos funciones que cumplen esto: $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

Nuevamente, para saber que se trata de dos funciones independientes alcanza con ver que su cociente no es constante. Esto es inmediato pues $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ no es una función constante.

Observemos que tanto en este caso como en los anteriores las funciones de la forma $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial.

4. Para resolver la ecuación de segundo orden $y'' + y' = 0$ podemos realizar la sustitución $z = y'$ y de esta forma $z' = y''$ y debemos resolver la ecuación de primer orden

$$z' = -z,$$

cuyas soluciones son $z(x) = C e^{-x}$ con $C \in \mathbb{R}$.

Como $y(x) = \int z(x) dx$, obtenemos que $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2$ para constantes arbitrarias $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Las dos soluciones independientes pedidas en el enunciado pueden ser $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = 1$, que fácilmente vemos que no es una múltiplo de la otra.

Estos sencillos ejemplos nos dan una idea del tipo de soluciones que pueden aparecer en las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes: exponenciales, senos, cosenos y funciones lineales. Observamos que siempre hemos logrado encontrar dos soluciones independientes. Es más, en todos los casos las combinaciones lineales de estas dos soluciones independientes dan lugar a nuevas soluciones. Usando el lenguaje del álgebra lineal podemos decir que el espacio de soluciones de estas ecuaciones homogéneas forman un subespacio vectorial de dimensión dos, o, en palabras más sencillas, que forman un plano dentro del espacio de las funciones.

El polinomio característico

Para el estudio sistemático de la ecuación 3.2, resulta conveniente introducir su *polinomio característico*

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B.$$

Las soluciones de la ecuación dependerán de las raíces reales o complejas de este polinomio característico.

Recordemos que las soluciones reales, si las tiene, de la ecuación cuadrática $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$, son de la forma

$$\lambda = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}.$$

La existencia de raíces reales depende del signo del *discriminante*

$$\Delta = A^2 - 4B,$$

si $\Delta > 0$ la ecuación tendrá dos raíces reales simples, si $\Delta = 0$ la ecuación tendrá una raíz real doble y si $\Delta < 0$ la ecuación tendrá dos raíces complejas simples.

Nos falta conocer las raíces en el caso en que el discriminante resulte negativo, para ello debemos definir los números complejos.

Los *números complejos* son aquellos que pueden escribir como $z = \alpha + \beta i$ con α y β reales e i el número imaginario que cumple $i^2 = -1$. A α y β se lo denomina parte real y parte imaginaria de z respectivamente. Dos números complejos son iguales si sus partes reales y sus partes imaginarias coinciden.

Con lo números complejos se opera de manera análoga que con los reales. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces la suma y el producto entre ambos números queda definida respectivamente como sigue:

- $z + w = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i.$
- $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cb i + bd i^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

Observación: Los números reales son aquellos complejos ($z = a + bi$) cuya parte imaginaria es cero ($b = 0$), es decir, el conjunto de los números reales está contenido en el conjunto de los números complejos. El número 0 tiene parte real y parte imaginaria nula.

Observación: Las soluciones de la ecuación cuadrática $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ con el discriminante $\Delta = A^2 - 4B$ negativo son de la forma $\lambda = \alpha \pm \beta i$ donde $\alpha = -\frac{A}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Demostración: Completamos cuadrados para dar con las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = \left(\lambda + \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + B = \left(\lambda + \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{4B - A^2}{4}.$$

Luego resolver la ecuación

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

resulta equivalente a encontrar las soluciones de

$$\left(\lambda + \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{4B - A^2}{4} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2 - 4B}{4}$$

$$\left(\lambda + \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4}.$$

Si llamamos $z = \lambda + \frac{A}{2}$, debemos encontrar z de modo que $z^2 = \frac{\Delta}{4}$. Notemos que el cuadrado de z es negativo y por lo tanto z no puede ser un número real. Buscamos a y b números reales de modo que $z = a + bi$ cumpla que $z^2 = \frac{\Delta}{4}$. Si reemplazamos en la ecuación tenemos que

$$(a + bi)^2 = \frac{\Delta}{4}$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = \frac{\Delta}{4}.$$

Para que dos números complejos sean iguales debe ocurrir que tanto las partes reales como las imaginarias de ambos deben ser iguales, entonces mirando la parte real y la parte imaginaria a ambos lados de la igualdad obtenemos las siguientes ecuaciones que deben cumplir a y b :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\Delta}{4} \\ 2ab = 0. \end{cases}$$

De la segunda igualdad observamos que se producen dos situaciones posibles: $a = 0$ ó $b = 0$.

Miremos primero el caso $a = 0$. Reemplazamos el valor de a en la primera ecuación y despejamos el valor de b :

$$0^2 - b^2 = \frac{\Delta}{4}$$

$$b^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

$$b^2 = \frac{-\Delta}{4}.$$

Como $-\Delta$ resulta positivo, entonces tenemos que $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ ó $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Por lo tanto $z = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$ ó $z = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$.

Trabajemos con el caso $b = 0$. Reemplazamos en la primera ecuación y obtenemos

$$a^2 = \frac{\Delta}{4},$$

pero a es un número real y $\Delta < 0$, entonces no existe a que cumpla la igualdad.

Luego las soluciones de la ecuación $z^2 = \frac{\Delta}{4}$ son $z = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$ ó $z = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$. Recordemos que $z = \lambda + \frac{A}{2}$, por lo tanto, despejando λ y reemplazando z por los valores obtenidos resulta que

$$\lambda = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i \text{ ó } \lambda = -\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$$

que era lo que queríamos demostrar. □

Resumiendo, dada una ecuación cuadrática $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ y el discriminante $\Delta = A^2 - 4B$, las soluciones son

■ si $\Delta \geq 0$, $\lambda = \frac{-A \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.

■ si $\Delta < 0$, $\lambda = \frac{-A}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$.

Resolución de la ecuación homogénea

Las soluciones de la ecuación diferencial homogénea (3.2)

$$y'' + Ay' + By = 0$$

están caracterizadas completamente por las raíces de su polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$.

Proposición (3.1.2): Si $\Delta = A^2 - 4B$ es el discriminante del polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$ de la ecuación homogénea (3.2), entonces:

1. Si $\Delta > 0$, entonces $\lambda_1 = \frac{-A-\sqrt{\Delta}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-A+\sqrt{\Delta}}{2}$ son las raíces de $\chi(\lambda)$. Además, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial.
2. Si $\Delta = 0$, entonces $\lambda = \frac{-A}{2}$ es raíz doble de $\chi(\lambda)$. Además, $y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = xe^{\lambda x}$ son soluciones de la ecuación diferencial.
3. Si $\Delta < 0$, entonces $\lambda_1 = \alpha - \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ con $\alpha = -\frac{A}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ son las raíces de $\chi(\lambda)$. Además, $y_1 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$ e $y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Demostración:

1. Si el discriminante del polinomio característico $\Delta = A^2 - 4B$ es positivo sus raíces λ_1 y λ_2 son reales y simples y están dadas por la fórmula resolvente. Veamos que las funciones $y = e^{\lambda_1 x}$ y $y = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial. Si buscamos las derivadas primera y segunda de $y = e^{\lambda_1 x}$, obtenemos $y' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$ e $y'' = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$. Entonces reemplazando en la ecuación tenemos que

$$y'' + Ay' + By = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + A\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_1 x} = (\lambda_1^2 + A\lambda_1 + B) e^{\lambda_1 x} = 0$$

pues λ_1 es raíz de χ , es decir $\lambda_1^2 + A\lambda_1 + B = \chi(\lambda_1) = 0$. De manera análoga se muestra que $y = e^{\lambda_2 x}$ es solución de la ecuación diferencial.

2. Si, en cambio, el discriminante $\Delta = 0$, el polinomio característico tiene una única raíz doble λ_0 , entonces $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$ y son soluciones de la ecuación diferencial $y = e^{\lambda_0 x}$ e $y = xe^{\lambda_0 x}$. Ya hemos visto que $y = e^{\lambda_0 x}$ es solución de la ecuación diferencial.

Nos resta ver que $y = xe^{\lambda_0 x}$ también es solución de la ecuación diferencial. Si derivamos resulta que su derivada primera resulta ser

$$y' = e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} = (1 + \lambda_0 x) e^{\lambda_0 x}$$

y su derivada segunda es

$$y'' = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) e^{\lambda_0 x}.$$

Si reemplazamos en la ecuación diferencial, usando que $\lambda_0^2 + A\lambda_0 + B = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} y'' + Ay' + By &= (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) e^{\lambda_0 x} + A(1 + \lambda_0 x) e^{\lambda_0 x} + Bx e^{\lambda_0 x} \\ &= (2\lambda_0 + A + (\lambda_0^2 + A\lambda_0 + B)x) e^{\lambda_0 x} = (2\lambda_0 + A) e^{\lambda_0 x}. \end{aligned}$$

Como el polinomio característico tiene una única raíz doble λ_0 vale

$$\lambda^2 + A\lambda + B = (\lambda - \lambda_0)^2$$

$$\lambda^2 + A\lambda + B = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2.$$

Entonces podemos afirmar que $A = -2\lambda_0$ y $B = \lambda_0^2$. Volviendo a la ecuación diferencial y reemplazando el valor de A resulta que

$$y'' + Ay' + By = (2\lambda_0 + A) e^{\lambda_0 x} = (2\lambda_0 - 2\lambda_0) e^{\lambda_0 x} = 0.$$

3. Por último, nos queda el caso $\Delta < 0$. Para corroborar que las funciones $y = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ e $y = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ son soluciones de la ecuación diferencial, usaremos que $\alpha + \beta i$ es raíz de $\chi(\lambda)$. Es decir resultan verdaderas las siguientes igualdades

$$(\alpha + \beta i)^2 + A(\alpha + \beta i) + B = 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i + A\alpha + A\beta i + B = 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B + (2\alpha\beta + A\beta)i = 0.$$

Como un número complejo es 0 si tanto la parte real como la imaginaria valen 0. Luego la última ecuación es verdadera si y solo si valen las siguientes igualdades

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B = 0 \\ 2\alpha\beta + A\beta = 0. \end{cases}$$

Verificaremos que $y = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, ya que en el caso de $y = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ la demostración resulta análoga. Calculamos su derivada primera

$$y' = \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

y su derivada segunda

$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \alpha \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \alpha \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$y'' = (\alpha^2 - \beta^2) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + 2\alpha \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y acomodando tenemos que

$$y'' + Ay' + By = (\alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + (2\alpha\beta + A\beta) e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Usando las igualdades a las que hemos arribado antes concluimos que

$$y'' + Ay' + By = 0 \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x) + 0 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) = 0.$$

□

A continuación introduciremos algunas definiciones de álgebra lineal que facilitan la comprensión geométrica y algebraica del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial.

Definición: Una *combinación lineal* de dos funciones y_1, y_2 es una función de la forma $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ donde C_1, C_2 son números reales.

Un conjunto de funciones S es un *subespacio vectorial* del espacio de las funciones si dadas dos funciones y_1 e y_2 de S , resulta que $C_1 y_1 + C_2 y_2 \in S$ para cualesquiera C_1 y C_2 reales.

Dos funciones y_1 e y_2 se dicen *linealmente independientes* (abreviado l.i.) si no hay una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = C y_2$.

Observación: Las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes $y'' + Ay' + By = 0$ forman un subespacio vectorial.

Demostración: Supongamos que y_1 e y_2 son soluciones de la Ecuación (3.2) y sean C_1, C_2 dos números reales cualesquiera. Veamos que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es también solución de la Ecuación (3.2):

$$y'' + Ay' + By = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + A(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + B(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + Ay_1' + By_1) + C_2(y_2'' + Ay_2' + By_2) = 0.$$

Por lo tanto las soluciones de la Ecuación (3.2) forman un subespacio. $\square$

El siguiente teorema nos será útil para conocer todas las soluciones de la Ecuación (3.2). Su demostración escapa a los contenidos de este curso.

Teorema (3.1.3): Las soluciones de la ecuación $y'' + Ay' + By = 0$ forman un subespacio vectorial de dimensión 2. En otras palabras: todas las soluciones de esta ecuación pueden escribirse como combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes.

Un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación cuyas combinaciones lineales dan lugar a todas las demás soluciones de la ecuación se denomina una *base de soluciones*. El Teorema anterior garantiza que cualquier base de soluciones de la Ecuación (3.2) tiene exactamente dos elementos.

Observación: Las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden (3.2) dados en la Proposición 3.1.2 forman una base de soluciones. Es decir, podemos afirmar que

1. si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$ son l.i.
2. las funciones $e^{\lambda_0 x}$ y $xe^{\lambda_0 x}$ son l.i.
3. si $\beta \neq 0$, entonces $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ y $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ son l.i..

Mostrar este resultado es sencillo. Casos particulares fueron demostrados en el Ejemplo 3.1.1.

Corolario (3.1.4): Consideremos $\Delta = A^2 - 4B$ el discriminante del polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$ de la Ecuación 3.2. Entonces $y = f(x)$ es solución de la ecuación (3.2) si existen los números reales C_1 y C_2 tales que:

1. $f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, si $\Delta > 0$ y si λ_1 y λ_2 son las dos raíces reales simples de $\chi(\lambda)$.
2. $f(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$, si $\Delta = 0$ y si λ_0 es la raíz doble de $\chi(\lambda)$.
3. $f(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, si $\Delta < 0$ y si $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ son las dos raíces complejas no reales simples de $\chi(\lambda)$.

Resumiendo, si consideramos las raíces λ_1 y λ_2 del polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea $y'' + Ay' + By = 0$ estarán dadas según la siguiente tabla:

Raíces	Base de Soluciones	Solución General
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\{e^{\lambda_1 x}; e^{\lambda_2 x}\}$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$	$\{e^{\lambda_0 x}; x e^{\lambda_0 x}\}$	$C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$
$\lambda_1 = \alpha + \beta i \notin \mathbb{R}$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i \notin \mathbb{R}$	$\{e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x);$ $e^{\alpha x} \cos(\beta x)\}$	$C_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

Recordar que, en los tres casos posibles, hay dos soluciones linealmente independientes y la solución general está formada por todas las combinaciones lineales de estas dos soluciones.

Ejemplo 3.1.5: Ecuaciones homogéneas

Encontrar todas las funciones $y = f(x)$ con segunda derivada continua que cumplan lo siguiente:

1. $\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$
4. $y'' + y' + y = 0.$
5. $y'' + y' = 0.$

Resolución:

1. Si queremos encontrar todas las funciones que cumplen la ecuación $y'' + 4y' - 5y = 0$ debemos hallar las raíces del polinomio

característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$.

Miremos el discriminante $\Delta = 4^2 - 4(-5) = 36 > 0$, entonces podemos afirmar que $\lambda_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = -5$ y $\lambda_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = 1$ son todas las raíces de χ y son simples.

Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación $y'' + 4y' - 5y = 0$ son de la forma $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Veamos ahora cuáles serán las condiciones sobre las constantes C_1 y C_2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C_1 e^{-5x} + C_2 e^x = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_1 e^{-5x} = 0$ sin importar el valor de C_1 y $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_2 e^x = +\infty$ si $C_2 \neq 0$, entonces la única condición sobre las constantes es que $C_2 = 0$, pues C_1 no tiene condiciones. Luego todas las soluciones del problema son $y = C_1 e^{-5x}$ con $C_1 \in \mathbb{R}$.

2. Resolvemos primero la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$, buscando las raíces de χ . Como el discriminante cumple $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$, χ tiene una única raíz real doble $\lambda_0 = \frac{-2}{2} = -1$. Luego todas las soluciones de la ecuación homogénea se escriben como $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Falta dar las constantes C_1 y C_2 que cumplan las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Con ese fin derivamos y obteniendo

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}.$$

Luego, si evaluamos en $x = 0$, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 e^{-0} + C_2 0 e^{-0} = 1 \\ -C_1 e^{-0} + C_2 e^{-0} - C_2 0 e^{-0} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 2. \end{cases}$$

Luego $C_1 = 1$ y $C_2 = 3$. Concluimos entonces que la solución de la ecuación diferencial que cumple las condiciones de borde es $y = e^{-x} + 3x e^{-x}$.

3. Para encontrar las funciones que cumplen la ecuación $y'' + 4y = 0$, calculamos el discriminante del polinomio característico y resulta ser $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 4 = -16 < 0$.

Entonces las raíces de χ son complejas no reales y simples. Las raíces son $\lambda_1 = \frac{-0}{2} - \frac{\sqrt{-(-16)}}{2}i = -2i$ y $\lambda_2 = 2i$.

Luego las soluciones de la ecuación diferencial son de la forma $y = C_1 e^{0x} \sen(2x) + C_2 e^{0x} \cos(2x) = C_1 \sen(2x) + C_2 \cos(2x)$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Buscamos, ahora, las constantes C_1 y C_2 que cumplen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Para eso derivamos y obteniendo $y' = 2C_1 \cos(2x) - 2C_2 \sen(2x)$. Luego reemplazamos x por 0 y resultan las siguientes igualdades

$$\begin{cases} C_1 \sen(2 \cdot 0) + C_2 \cos(2 \cdot 0) = 1 \\ 2C_1 \cos(2 \cdot 0) - 2C_2 \sen(2 \cdot 0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto la solución del problema de valores iniciales resulta ser

$$y = -\frac{1}{2} \sen(2x) + \cos(2x).$$

4. En este ejemplo no tenemos condición inicial, únicamente debemos encontrar las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y' + y = 0$. Al igual que en los puntos anteriores debemos calcular el discriminante del polinomio característico: $\Delta = -3 < 0$. Luego las raíces del polinomio resultan ser $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación diferencial se escriben de la forma

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Debemos hallar las soluciones de la ecuación $y'' + y' = 0$. Como el discriminante del polinomio característico es $\Delta = 1 > 0$, entonces sus raíces son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. Luego las soluciones de la ecuación diferencial son $y = C_1 + C_2 e^{-x}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Modelo matemático del resorte

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes permiten modelar algunos fenómenos físicos, como por ejemplo el movimiento de un cuerpo de masa m que pende de un resorte. Este movimiento está gobernado por la ley de elasticidad de Hooke, que se expresa mediante la siguiente ecuación

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

donde y es el desplazamiento del cuerpo a partir de su posición de equilibrio, cy' es la fuerza de rozamiento, ky es la fuerza que ejerce el resorte y $F(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo. A continuación veremos un ejemplo sencillo donde la fuerza externa $F(t)$ es cero. Estudiaremos un ejemplo con forzamiento externo en la sección siguiente, correspondiente a las ecuaciones no homogéneas.

Ejemplo 3.1.6: Resorte amortiguado

Un resorte tiene un extremo fijo y en el otro una masa cuya posición en función del tiempo, $y(t)$, satisface la siguiente ecuación diferencial $y'' + 2y' + 26y = 0$.

1. Halle la solución general de la ecuación diferencial.
2. Si se sabe que $y(0) = 0$ y que $y'(0) = 5$, calcule la solución particular y grafíquela.
3. Describa con sus palabras qué ocurre con la solución particular hallada a medida que pasa el tiempo.

Resolución: Se trata de una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Por lo tanto aplicamos el métodos expuesto en el apartado anterior.

1. El polinomio característico de la ecuación diferencial es $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 26$ y tiene a $\lambda = -1 + 5i$ y a $\lambda = -1 - 5i$ como raíces. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(t) = C_1 e^{-t} \cos(5t) + C_2 e^{-t} \sin(5t).$$

2. Evaluando la solución general y su derivada en cero obtenemos

$$y'(t) = (-5C_1 - C_2)e^{-t}\sin(5t) + (5C_2 - C_1)e^{-t}\cos(5t),$$

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 5C_2 - C_1 = 5,$$

de donde concluimos que la solución buscada ($C_1 = 0, C_2 = 1$) es

$$y(t) = e^{-t}\sin(5t).$$

El gráfico correspondiente a $y(t)$ es el siguiente:

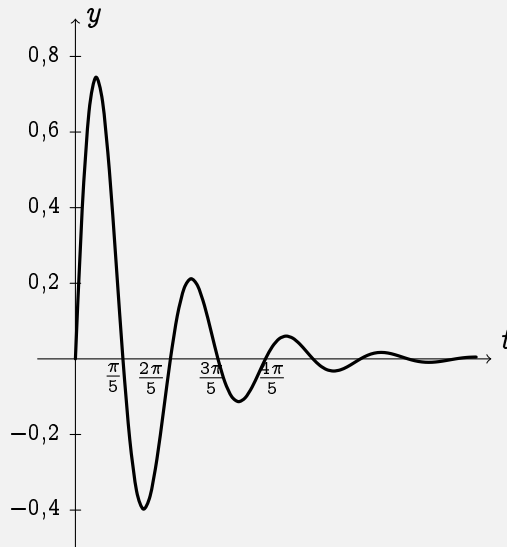


Figura 3.1: Resorte Amortiguado

3. La solución oscila con una amplitud dominada por la función exponencial decreciente e^{-t} . Por lo tanto, la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo, tendiendo a cero en el infinito.

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1: Determine los coeficientes de la ecuación $ay'' + by' + cy = 16x$ sabiendo que $y = e^{-x} + 4x - 5$ es una solución.

Ejercicio 3.1.2: Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a. $y'' + y' - 6y = 0$. | d. $y'' + 10y' + 25y = 0$. |
| b. $2y'' - 4y' + 2y = 0$. | e. $3y'' + 18y' + 39y = 0$. |
| c. $6y'' + 35y' - 12y = 0$. | f. $y'' - 4y' + 5y = 0$. |

Ejercicio 3.1.3: Un resorte tiene un extremo fijo y en el otro una masa cuyo movimiento en función del tiempo, $y(t)$, satisface la siguiente ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

- Halle la solución general de la ecuación diferencial.
- Si se sabe que $y(0) = 2$ y que $y'(0) = 4$, calcule la solución particular y gráfiquela.
- Describa con sus palabras qué ocurre con la solución particular hallada a medida que pasa el tiempo.

3.2 Ecuaciones no homogéneas

En esta sección trabajaremos con *ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes* que, recordemos, pueden escribirse de la forma (3.1)

$$y'' + Ay' + By = R(x)$$

donde A y B son número reales y $R(x)$ es una función no constantemente nula.

Diremos que la ecuación $y'' + Ay' + By = 0$ (3.2) es la *ecuación homogénea asociada* a la ecuación (3.1).

Observación: Si $y_p(x)$ es una solución de la ecuación (3.1) y $y_H(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_H(x) + y_p(x)$ es también una solución de la ecuación (3.1).

Demostración: Como y_H es solución de la ecuación homogénea asociada, cumple

$$y_H'' + Ay_H' + By_H = 0$$

y como y_P es una solución particular de la ecuación no homogénea resulta

$$y_P'' + Ay_P' + By_P = R(x).$$

Si simplemente reemplazamos y por $y_H + y_P$ veremos que cumple con la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' + Ay' + By &= (y_H + y_P)'' + A(y_H + y_P)' + B(y_H + y_P) = \\ &= y_H'' + Ay_H' + By_H + y_P'' + Ay_P' + By_P = 0 + R(x). \end{aligned}$$

□

Observación: Por otra parte, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación (3.1), su diferencia, $y_1 - y_2$, es solución de la ecuación homogénea asociada (3.2).

La demostración de la observación queda en manos del lector, pues, como en la observación anterior, se debe verificar que $y_1 - y_2$ cumple la ecuación homogénea asociada.

Luego concluimos el siguiente resultado:

Teorema (3.2.1): Si y_P es una solución particular de la ecuación (3.1), las soluciones de la ecuación son exactamente las funciones que pueden escribirse de la forma $y_H + y_P$, donde y_H es una solución de la ecuación homogénea asociada (3.2).

Este resultado implica que, para hallar todas las soluciones de una ecuación no homogénea, alcanza con encontrar una solución particular de esta ecuación y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Encontrar una solución particular no siempre es sencillo. En el siguiente apartado introducimos un método para hallar una solución particular para algunos casos usuales de $R(x)$: el método de los coeficientes indeterminados.

Es posible usar otros métodos, como el de variación de constantes, sin embargo no veremos este método en este apunte.

Método de coeficientes indeterminados

Dado que ya sabemos encontrar las soluciones de la ecuación homogénea $y'' + Ay' + By = 0$ y que forman un subespacio, necesitamos un método para encontrar una solución particular, y_P . Con una sola solución particular nos alcanza ya que la solución general de una ecuación no homogénea tendrá la forma $y_H + y_P$ con y_H la solución general de la ecuación homogénea asociada.

El método de los coeficientes indeterminados propone una solución particular de

$$y'' + Ay' + By = R(x)$$

para $R(x) = p(x)e^{ax} \sin(bx)$ ó $R(x) = p(x)e^{ax} \cos(bx)$ con $p(x)$ un polinomio. La solución particular obtenida mediante este método será la forma

$$y_P = x^k (q_1(x)e^{ax} \cos(bx) + q_2(x)e^{ax} \sin(bx))$$

con q_1 y q_2 polinomios de igual o menor grado que el grado de p y con k la multiplicidad de $a + bi$ como raíz del polinomio característico. Debemos buscar los coeficientes de los polinomios q_1 y q_2 de modo que y_P sea efectivamente solución de la ecuación diferencial.

Cabe destacar que la solución particular propuesta depende del polinomio característico y de la función $R(x)$. Notemos que solo podremos usar este método con las funciones antes expuestas.

Observación: Es fácil ver que si y_{p_1} es solución de $y'' + Ay' + by = R_1(x)$ e y_{p_2} lo es de $y'' + Ay' + by = R_2(x)$, entonces $y_{p_1} + y_{p_2}$ es solución de $y'' + Ay' + by = R_1(x) + R_2(x)$.

Luego si debemos encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + Ay' + by = R_1(x) + R_2(x)$, debemos buscar la solución general y_H de la ecuación homogénea asociada. Entonces la solución general de $y'' + Ay' + by = R_1(x) + R_2(x)$ resulta ser $y = y_H + y_{p_1} + y_{p_2}$.

Aclararemos el uso de este método en los ejemplos que prosiguen.

Ejemplo 3.2.2: Coeficientes indeterminados

Hallar una solución particular y dar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y'' + 6y' + 9y = R(x)$ con

a) $R(x) = 9x$.

b) $R(x) = e^{-3x}$.

c) $R(x) = 8e^{-3x} \cos(x)$.

2. $y'' + 2y' = R(x)$ con

a) $R(x) = 4 \operatorname{sen}(-x)$.

b) $R(x) = 3x - 6$.

c) $R(x) = 4 \operatorname{sen}(-x) + 3x - 6$.

3. $y'' - 2y' + 2y = R(x)$ con

a) $R(x) = 4xe^x$.

b) $R(x) = e^x \cos(x)$.

c) $R(x) = 20xe^x - 3e^x \cos(x)$.

4. $y'' + 4y = R(x)$ con

a) $R(x) = e^x \cos(2x)$.

b) $R(x) = x \operatorname{sen}(2x)$.

Resolución:

1. Para poder dar una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = R(x)$ debemos mirar las raíces el polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$. Su única raíz doble es $\lambda_0 = -3$. Hemos visto que las soluciones de la ecuación homogénea asociada son $y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$. Ahora buscaremos la solución particular según $R(x)$:

- a) Como $R(x) = 9x = 9x (e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x) + e^{0 \cdot x} \operatorname{sen}(0 \cdot x))$, tenemos que $p(x) = 9x$ y que $a + bi = 0$ no es raíz del polinomio característico, entonces proponemos como solución particular

$$y_P = q_1(x) e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x) + q_2(x) e^{0 \cdot x} \operatorname{sen}(0 \cdot x)$$

$$y_P = q_1(x)$$

con q_1 de grado menor o igual a 1 que es el grado de p . Por lo tanto, buscamos los coeficientes de q_1 , es decir a_1 y a_2 de modo que:

$$y_P = a_1 x + a_2.$$

Derivamos y_P

$$y'_P = a_1$$

$$y''_P = 0$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial

$$y_P'' + 6y_P' + 9y_P = 9x$$

$$0 + 6a_1 + 9(a_1x + a_2) = 9x$$

$$9a_1x + 6a_1 + 9a_2 = 9x.$$

Como buscamos a_1 y a_2 de forma tal que los polinomios de ambos lados de la igualdad sean iguales, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 6a_1 + 9a_2 = 0. \end{cases}$$

Luego $a_1 = 1$ y $a_2 = -\frac{2}{3}$.

Por lo tanto $y_P = x - \frac{2}{3}$ y la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + x - \frac{2}{3}.$$

- b) En este caso debemos resolver la ecuación $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$. Observemos que

$$R(x) = e^{-3x} = 1 \cdot e^{-3x} \cos(0 \cdot x),$$

entonces podemos tomar $p(x) = 1$. Como $-3 + 0 \cdot i = -3$ es raíz doble del polinomio característico proponemos como solución particular

$$y_P = x^2 (q_1(x)e^{-3x} \cos(0 \cdot x) + q_2e^{-3x} \operatorname{sen}(0 \cdot x)) = x^2 q_1(x)e^{-3x}$$

con q_1 un polinomio de grado 0 que es el grado de p . Entonces buscamos a_1 de modo que $q_1(x) = a_1$ y la solución propuesta cumpla la ecuación diferencial. Derivando $y_P = a_1x^2e^{-3x}$ obtenemos

$$y_P' = 2a_1xe^{-3x} - 3a_1x^2e^{-3x} = (2a_1x - 3a_1x^2)e^{-3x}$$

$$\begin{aligned} y_P'' &= 2a_1e^{-3x} - 12a_1xe^{-3x} + 9a_1x^2e^{-3x} = \\ &= (2a_1 - 12a_1x + 9a_1x^2)e^{-3x}. \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial $y_P'' + 6y_P' + 9y_P = e^{-3x}$. Calculemos la suma primero

$$\begin{array}{r}
 y_P'' = (2a_1 - 12a_1x + 9a_1x^2)e^{-3x} \\
 + \\
 6y_P' = 6(2a_1x - 3a_1x^2)e^{-3x} \\
 + \\
 9y_P = 9a_1x^2e^{-3x} \\
 \hline
 y_P'' + 6y_P' + 9y_P = 2a_1e^{-3x}
 \end{array}$$

Por lo tanto debemos hallar a_1 de modo que

$$2a_1e^{-3x} = e^{-3x}.$$

Luego $a_1 = \frac{1}{2}$.

Concluimos que una solución particular de la ecuación diferencial es $y_P = \frac{1}{2}x^2e^{-3x}$ y que la solución general es

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{2}x^2e^{-3x}.$$

- c) En este ejemplo debemos encontrar una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}\cos(x)$, en este caso $p(x) = 8$ y $-3 + i$ no es raíz del polinomio característico. Vamos a proponer como solución

$$y_P = q_1(x)e^{-3x}\cos(x) + q_2(x)e^{-3x}\sin(x)$$

con q_1 y q_2 polinomios de grado 0. Entonces

$$y_P = a_1e^{-3x}\cos(x) + a_2e^{-3x}\sin(x).$$

Derivamos una vez, ordenamos y obtenemos $y_P' =$

$$\begin{aligned}
 & -3a_1e^{-3x}\cos(x) - a_1e^{-3x}\sin(x) - 3a_2e^{-3x}\sin(x) + a_2e^{-3x}\cos(x) \\
 & = (-3a_1 + a_2)e^{-3x}\cos(x) + (-a_1 - 3a_2)e^{-3x}\sin(x).
 \end{aligned}$$

Derivamos por segunda vez

$$y_P'' = (9a_1 - 3a_2)e^{-3x}\cos(x) + (3a_1 - a_2)e^{-3x}\sin(x) +$$

$$\begin{aligned}
 &+(3a_1 + 9a_2)e^{-3x} \operatorname{sen}(x) + (-a_1 - 3a_2)e^{-3x} \cos(x) = \\
 &= (8a_1 - 6a_2)e^{-3x} \cos(x) + (6a_1 + 8a_2)e^{-3x} \operatorname{sen}(x).
 \end{aligned}$$

Debemos reemplazar en la ecuación diferencial

$$y_P'' + 6y_P' + 9y_P = 8e^{-3x} \cos(x),$$

primero reescribiremos la suma $y_P'' + 6y_P' + 9y_P$:

$$\begin{aligned}
 y_P'' &= (8a_1 - 6a_2)e^{-3x} \cos(x) + (6a_1 + 8a_2)e^{-3x} \operatorname{sen}(x) \\
 + \quad 6y_P' &= 6 [(-3a_1 + a_2)e^{-3x} \cos(x) - (a_1 + 3a_2)e^{-3x} \operatorname{sen}(x)] \\
 + \quad 9y_P &= 9 [a_1e^{-3x} \cos(x) + a_2e^{-3x} \operatorname{sen}(x)] \\
 \hline
 y_P'' + 6y_P' + 9y_P &= -a_1e^{-3x} \cos(x) - a_2e^{-3x} \operatorname{sen}(x)
 \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación diferencial, las constantes a_1 y a_2 deben cumplir

$$-a_1e^{-3x} \cos(x) - a_2e^{-3x} \operatorname{sen}(x) = 8e^{-3x} \cos(x),$$

entonces tomando $a_1 = -8$ y $a_2 = 0$ vale la igualdad.

Una solución particular de la ecuación es $y_P = -8e^{-3x} \cos(x)$ y la solución general es

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} - 8e^{-3x} \cos(x).$$

2. Para dar las soluciones de $y'' + 2y' = R(x)$, buscamos las raíces del polinomio característico $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$. Las raíces de χ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$, ambas simples. Luego las soluciones de la ecuación homogénea asociada se escriben $y_H = C_1 + C_2e^{-2x}$.

Dependiendo de $R(x)$ tendremos distintas soluciones de la ecuación diferencial:

- a) Si $R(x) = 4 \operatorname{sen}(-x)$, como $0 - i$ no es raíz del polinomio característico y $p(x) = 4$ tiene grado 0, el método de coeficientes indeterminados nos sugiere tomar como solución particular

$$y_P = a_1 \operatorname{sen}(-x) + a_2 \cos(-x).$$

Derivamos y reemplazamos en la ecuación

$$y_P'' = -a_1 \operatorname{sen}(-x) - a_2 \cos(-x)$$

+

$$2y_P' = 2[-a_1 \cos(-x) + a_2 \operatorname{sen}(-x)]$$

$$y_P'' + 2y_P' = (-2a_1 - a_2) \cos(-x) + (-a_1 + 2a_2) \operatorname{sen}(-x)$$

Entonces como $y_P'' + 2y_P' = 4 \operatorname{sen}(-x)$, debe cumplirse la igualdad

$$(-2a_1 - a_2) \cos(-x) + (-a_1 + 2a_2) \operatorname{sen}(-x) = 4 \operatorname{sen}(-x),$$

y alcanza con que valgan las siguientes igualdades

$$\begin{cases} -2a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 = 4 \end{cases}$$

Luego $a_1 = -\frac{4}{5}$ y $a_2 = \frac{8}{5}$.

Por lo tanto, la solución particular buscada es

$$y_P = -\frac{4}{5} \operatorname{sen}(-x) + \frac{8}{5} \cos(-x)$$

y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{4}{5} \operatorname{sen}(-x) + \frac{8}{5} \cos(-x).$$

- b) En este caso $R(x) = 3x - 6$, usando la notación previa, p tiene grado 1 y $a + bi = 0$ es raíz simple del polinomio característico. Tomaremos entonces como solución particular a

$$y_P = x(a_1x + b_1) = a_1x^2 + b_1x.$$

Luego si derivamos y luego reemplazamos en la ecuación diferencial no homogénea son verdaderas las afirmaciones

$$y_P'' + 2y_P' = 3x - 6$$

$$2a_1 + 2(2a_1x + b_1) = 3x - 6$$

$$4a_1x + 2a_1 + 2b_1 = 3x - 6.$$

Entonces deben ser válidas

$$\begin{cases} 4a_1 = 3 \\ 2a_1 + 2b_1 = -6 \end{cases}$$

Por lo tanto $a_1 = \frac{3}{4}$ y $b_1 = -\frac{15}{4}$. Concluimos que $y_P = \frac{3}{4}x^2 + -\frac{15}{4}x$ y que la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{3}{4}x^2 + -\frac{15}{4}x.$$

- c) Observemos que, por la linealidad de la derivación, si y_{p_1} es una solución particular de $y'' + 2y' = 4\sin(-x)$ e y_{p_2} lo es de $y'' + 2y' = 3x - 6$, entonces $y_P = y_{p_1} + y_{p_2}$ es solución particular de $y'' + 2y' = 4\sin(-x) + 3x - 6$. En lo puntos anteriores encontramos y_{p_1} e y_{p_2} , luego

$$y_P = -\frac{4}{5}\sin(-x) + \frac{8}{5}\cos(-x) + \frac{3}{4}x^2 + -\frac{15}{4}x.$$

Entonces la solución general de la ecuación $y'' + 2y' = 4\sin(-x) + 3x - 6$ es

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{4}{5}\sin(-x) + \frac{8}{5}\cos(-x) + \frac{3}{4}x^2 + -\frac{15}{4}x.$$

3. Debemos resolver $y'' - 2y' + 2y = R(x)$. Al igual que en los ejemplos previos buscamos primero las raíces del polinomio característico. Resultan ser complejas no reales y simples: $\lambda_1 = 1 - i$ y $\lambda_2 = 1 + i$. Luego la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_H = C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x).$$

- a) Como $R(x) = 4xe^x$, el polinomio $p(x) = 4x$ tiene grado 1 y $1 + 0i$ no es raíz del polinomio característico, buscamos a_1 y b_1 de modo que

$$y_P = (a_1x + b_1)e^x$$

sea solución particular de la ecuación no homogénea.

Hacemos las cuentas:

$$\begin{array}{r}
 y_P'' = (a_1x + 2a_1 + b_1)e^x \\
 - \\
 2y_P' = 2(a_1x + a_1 + b_1)e^x \\
 + \\
 2y_P = 2(a_1x + b_1)e^x \\
 \hline
 y_P'' - 2y_P' + 2y_P = (a_1x + b_1)e^x
 \end{array}$$

Como y_P debe cumplir la ecuación $y_P'' - 2y_P' + 2y_P = 4xe^x$, entonces debe valer la siguiente igualdad

$$(a_1x + b_1)e^x = 4xe^x,$$

entonces

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 0. \end{cases}$$

Concluimos que una solución particular de la ecuación no homogénea es $y_P = 4xe^x$ y que la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x) + 4xe^x.$$

- b) En este ítem debemos encontrar una solución particular y dar la solución general de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(x).$$

Notamos que el polinomio $p(x) = 1$ tiene grado 0 y que $1 + i$ es raíz simple del polinomio característico. Luego consideramos

$$y_P = x(a_1e^x \cos(x) + a_2e^x \sin(x)) = a_1xe^x \cos(x) + a_2xe^x \sin(x).$$

Derivando obtenemos, respectivamente para y_P' e y_P''

$$((a_1 + a_2)x + a_1)e^x \cos(x) + ((-a_1 + a_2)x + a_2)e^x \sin(x), \text{ y}$$

$$(2a_2x + 2a_1 + 2a_2)e^x \cos(x) + (-2a_1x - 2a_1 + 2a_2)e^x \sin(x).$$

Luego

$$y_P'' - 2y_P' + 2y_P = 2a_2e^x \cos(x) - 2a_1e^x \sin(x).$$

La solución y_P debe cumplir la ecuación diferencial, luego debe valer la igualdad

$$2a_2e^x \cos(x) - 2a_1e^x \sin(x) = e^x \cos(x).$$

Por lo tanto $a_1 = 0$ y $a_2 = \frac{1}{2}$.

La solución particular obtenida es $y_P = \frac{1}{2}xe^x \sin(x)$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x) + \frac{1}{2}xe^x \sin(x).$$

- c) Buscamos las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' - 2y' + 2y = 20xe^x - 3e^x \cos(x).$$

Ya sabemos que las soluciones de la ecuación homogénea asociada son

$$y_H = C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x).$$

Además en los dos puntos anteriores encontramos que $4xe^x$ y $1/2xe^x \sin(x)$ son dos soluciones particulares de $y'' - 2y' + 2y = 4xe^x$ y de $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(x)$ respectivamente. Luego, debido a la linealidad de la ecuación, es sencillo chequear que una solución particular de la ecuación que debemos resolver es

$$y_P = 5 \cdot 4xe^x - 3 \cdot \frac{1}{2}xe^x \sin(x).$$

Concluimos que todas las soluciones de la ecuación diferencial se escriben del siguiente modo:

$$y = C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x) + 20xe^x - \frac{3}{2}xe^x \sin(x).$$

4. Antes de dar las soluciones de $y'' + 4y = R(x)$, encontraremos la solución general de la ecuación homogénea asociada. Notemos que el polinomio característico es $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4$ cuyas raíces son $\lambda_1 = -2i$ y $\lambda_2 = 2i$, ambas simples. Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

- a) Si $R(x) = e^x \cos(2x)$, como $p(x) = 1$ tiene grado 0 y $1 + 2i$ no raíz del polinomio característico, buscamos a_1 y a_2 de modo que

$$y_P = a_1 e^x \cos(2x) + a_2 e^x \sin(2x)$$

sea una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 4y = e^x \cos(2x)$. Si derivamos y reemplazamos en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} y_P'' &= (-3a_1 + 4a_2)e^x \cos(2x) + (-4a_1 - 3a_2)e^x \sin(2x) \\ + \\ 4y_P &= 4[a_1 e^x \cos(2x) + a_2 e^x \sin(2x)] \end{aligned}$$

$$y_P'' + 4y_P = (a_1 + 4a_2)e^x \cos(2x) + (-4a_1 + a_2)e^x \sin(2x)$$

Como debe cumplirse que

$$(a_1 + 4a_2)e^x \cos(2x) + (-4a_1 + a_2)e^x \sin(2x) = e^x \cos(2x),$$

entonces a_1 y a_2 cumplen

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 = 1 \\ -4a_1 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Luego $a_1 = \frac{1}{17}$ y $a_2 = \frac{4}{17}$.

Por lo tanto, $y_P = \frac{1}{17}e^x \cos(2x) + \frac{4}{17}e^x \sin(2x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Concluimos que $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{17}e^x \cos(2x) + \frac{4}{17}e^x \sin(2x)$ es la solución general de la ecuación no homogénea.

- b) En este punto debemos buscar una solución particular de $y'' + 4y = x \sin(2x)$. En este caso $p(x) = x$ tiene grado 1 y $0 + 2i$ es raíz simple del polinomio característico. Buscaremos una solución particular de la forma

$$y_P = x[(a_1 x + b_1) \cos(2x) + (a_2 x + b_2) \sin(2x)]$$

$$y_P = (a_1 x^2 + b_1 x) \cos(2x) + (a_2 x^2 + b_2 x) \sin(2x).$$

Nuevamente derivamos y reemplazamos en la ecuación

$$y_P'' = (-4a_1x^2 + (-4b_1 + 8a_2)x + 2a_1 + 4b_2)\cos(2x) + (-4a_2x^2 + (-8a_1 - 4b_2)x - 4b_1 + 2a_2)\sin(2x) +$$

$$4y_P = 4[(a_1x^2 + b_1x)\cos(2x) + (a_2x^2 + b_2x)\sin(2x)]$$

$$y_P'' + 4y_P = (8a_2x + 2a_1 + 4b_2)\cos(2x) + (-8a_1x - 4b_1 + 2a_2)\sin(2x)$$

Luego debemos buscar a_1 , b_1 , a_2 y b_2 de modo que $x \sin(2x) = (8a_2x + 2a_1 + 4b_2)\cos(2x) + (-8a_1x - 4b_1 + 2a_2)\sin(2x)$.

La igualdad anterior se puede traducir en el siguiente sistema

$$\begin{cases} 8a_2 = 0 \\ 2a_1 + 4b_2 = 0 \\ -8a_1 = 1 \\ -4b_1 + 2a_2 = 0. \end{cases}$$

Entonces $a_1 = -\frac{1}{8}$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$ y $b_2 = \frac{1}{16}$.

Concluimos que la solución particular es

$$y_P = -\frac{1}{8}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{16}x \sin(2x)$$

y la solución general es

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{1}{8}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{16}x \sin(2x).$$

Observación: En los ejemplos del apartado anterior hemos buscado las soluciones particulares dentro de un subespacio de funciones y hemos usado que la base de ese subespacio (para algún n conveniente) es, si $b \neq 0$,

$$\{x^n e^{ax} \cos(bx); x^n e^{ax} \sin(bx); \dots; x^2 e^{ax} \cos(bx); x^2 e^{ax} \sin(bx);$$

$$x e^{ax} \cos(bx); x e^{ax} \sin(bx); e^{ax} \cos(bx); e^{ax} \sin(bx)\}$$

o, si $b = 0$,

$$\{x^n e^{ax}; \dots; x^2 e^{ax}; x e^{ax}; e^{ax}\}.$$

Es decir, buscamos la única combinación lineal de los elementos de la base que forma la solución particular.

Ejemplo 3.2.3: Ecuación de segundo orden

Sea la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = (5x + 2)e^x$.

1. Hallar los números reales a y b de modo que $y = \text{sen}(2x) + xe^x$ sea solución de la ecuación diferencial.
2. Dar todas las soluciones de la ecuación diferencial que cumplan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = 7$.

Resolución:

1. Al tener el dato que $y = \text{sen}(2x) + xe^x$ es solución de la ecuación, debemos derivar y dos veces y reemplazar en la ecuación:

$$\begin{array}{rcl}
 y'' & = & -4\text{sen}(2x) + (x+2)e^x \\
 + & & \\
 ay' & = & a[2\cos(2x) + (x+1)e^x] \\
 + & & \\
 by & = & b[\text{sen}(2x) + xe^x] \\
 \hline
 y'' + ay' + by & = & (b-4)\text{sen}(2x) + 2a\cos(2x) + ((a+b+1)x + a+2)e^x
 \end{array}$$

Como a y b deben cumplir para todo x la igualdad

$$(5x + 2)e^x = (b - 4)\text{sen}(2x) + 2a\cos(2x) + ((a + b + 1)x + a + 2)e^x,$$

obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} b - 4 = 0 \\ 2a = 0 \\ a + b + 1 = 5 \\ a + 2 = 2. \end{array} \right.$$

Las únicas soluciones del sistema son $a = 0$ y $b = 4$.

2. Para poder encontrar las soluciones de la ecuación diferencial, debemos primero encontrar la solución general de $y'' + 4y = (5x+2)e^x$ (reemplazamos los valores de a y b obtenidos en el punto anterior).

Con ese objetivo, buscamos la solución general de la ecuación homogénea asociada. Notemos que $\lambda_1 = -2i$ y $\lambda_2 = 2i$ son las raíces del polinomio característico (son simples). Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

En este ejercicio no necesitamos usar el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular, pues tenemos como dato que una solución particular de la ecuación no homogénea es $y_P = \sin(2x) + xe^x$. Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación diferencial no homogénea se escriben de la siguiente manera:

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \sin(2x) + xe^x.$$

Por último debemos buscar los coeficientes C_1 y C_2 de modo que valga la condición

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \sin(2x) + xe^x}{x} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[C_1 \frac{\cos(2x)}{x} + C_2 \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\sin(2x)}{x} + e^x \right] = 7.$$

Para calcular el siguiente límite usamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\cos(2x)}{1} = 2.$$

Sabemos también que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$. Pero como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x)}{x} = +\infty$

y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(2x)}{x} = -\infty$, para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x}$ exista y sea finito debemos pedir que $C_1 = 0$. Si usamos toda esta información resulta

que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[C_1 \frac{\cos(2x)}{x} + C_2 \frac{\sen(2x)}{x} + \frac{\sen(2x)}{x} + e^x \right] = 2C_2 + 2 + 1$$

$$7 = 2C_2 + 2 + 1.$$

Por lo tanto $C_2 = 2$. Entonces la única solución de la ecuación que cumple lo pedido es

$$y = 2 \sen(2x) + \sen(2x) + xe^x = 3 \sen(2x) + xe^x.$$

Ejemplo 3.2.4: Ecuación con parámetros

Encontrar todos los números reales a , b y c sabiendo que $y = 2e^x + x^3$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = cx^3 - 4cx^2 + 2cx.$$

Para los valores de a , b y c hallados dar las soluciones que cumplen $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$.

Resolución: Al igual que en el ejemplo anterior, para encontrar las constantes a , b y c , derivamos dos veces $y = 2e^x + x^3$ y reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\begin{array}{rcl} y'' & = & 2e^x + 6x \\ + & & \\ ay' & = & a(2e^x + 3x^2) \\ + & & \\ by & = & b(2e^x + x^3) \\ \hline y'' + ay' + by & = & (2a + 2b + 2)e^x + bx^3 + 3ax^2 + 6x \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= cx^3 - 4cx^2 + 2cx \\ (2a + 2b + 2)e^x + bx^3 + 3ax^2 + 6x &= cx^3 - 4cx^2 + 2cx. \end{aligned}$$

Por lo tanto a , b y c deben cumplir el sistema

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2 = 0 \\ b = c \\ 3a = -4c \\ 6 = 2c \end{cases}$$

Los únicos valores posibles para las constantes buscadas son $a = -4$, $b = 3$ y $c = 3$.

Para poder dar las soluciones que cumplan las condiciones iniciales debemos encontrar la solución general de la ecuación cuando $a = -4$, $b = 3$ y $c = 3$:

$$y'' - 4y' + 3y = 3x^3 - 12x^2 + 6x.$$

Usando que las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, podemos afirmar que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Como tenemos como dato una solución particular de la ecuación no homogénea $y_P = 2e^x + x^3$, podemos concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 2e^x + x^3.$$

Nos falta encontrar C_1 y C_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales. Derivamos y evaluamos en $x = 0$, obteniendo las igualdades siguientes

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 2 \\ y'(0) = C_1 + 3C_2 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 2 \\ 5 = C_1 + 3C_2 + 2. \end{cases}$$

Entonces $C_1 = -3$ y $C_2 = 2$. Afirmamos que la solución de la ecuación que cumple la condición inicial es

$$y = -3e^x + 2e^{3x} + 2e^x + x^3$$

$$y = -e^x + 2e^{3x} + x^3.$$

Ejemplo 3.2.5: *Resorte con forzamiento externo*

Hallar la solución general de

$$y'' + 2y' + 26y = t^2.$$

Resolución: Si conseguimos una solución particular y_P , la solución general de la ecuación planteada será $y_G = y_P + y_H$, donde y_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada. Por la resolución de un ejemplo anterior, sabemos que

$$y_H(t) = C_1 e^{-t} \cos(5t) + C_2 e^{-t} \sin(5t).$$

Por lo tanto, solo nos falta encontrar una solución particular. Para esto usaremos el método de los coeficientes indeterminados.

Como en nuestro caso es $R(t) = t^2$ y cero no es raíz del polinomio característico $\chi(\lambda)$, planteamos

$$y_P = at^2 + bt + c.$$

Reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$26(at^2 + bt + c) + 2(2at + b) + (2a) = t^2.$$

Agrupando, queda $26at^2 + (26b + 4a)t + (26c + 2b + 2a) = t^2$. Como dos polinomios solo pueden ser iguales si sus coeficientes son iguales concluimos que $26a = 1$, $26b + 4a = 0$ y $26c + 2b + 2a = 0$. Luego $a = \frac{1}{26}$, $b = -\frac{1}{169}$ y $c = -\frac{11}{4394}$.

Por lo tanto, la solución general, y_G , será

$$y_G = y_H + y_P = C_1 e^{-t} \cos(5t) + C_2 e^{-t} \sin(5t) + \frac{1}{26} t^2 - \frac{1}{169} t - \frac{11}{4394}.$$

Ejercicios

Ejercicio 3.2.1: Hallar en cada caso la solución general de la ecuación diferencial dada.

- a. $y'' + 4y' + 3y = 50x \operatorname{sen}(x)$. f. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.
 b. $y'' - 4y' + 5y = e^{-2x}$. g. $y'' + 6y' - 7y = e^{3x} \operatorname{sen}(2x)$.
 c. $y'' + y = \cos x$. h. $y'' + y' - 2y = x + 3e^x$.
 d. $y'' + 3y' - 10y = (x - 2)e^x$. i. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x$.
 e. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-5x}$.

Sugerencia: para el ítem i. considerar la sustitución $u = y' - 2y$.

Ejercicio 3.2.2: Resolver los siguientes problemas de valores iniciales y graficar aproximadamente las soluciones obtenidas.

- a. $\begin{cases} y'' + 4y = 8x^2 - 4x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} y'' + 2y' - 2y = 1 \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = -2 \end{cases}$
 b. $\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = \frac{7}{36}, y'(0) = -\frac{1}{36} \end{cases}$ d. $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Ejercicio 3.2.3: Encontrar todos los posibles números reales a y b de modo que la función $f(x) = xe^{-2x} + e^{3x}$ sea solución de la ecuación

$$y'' + ay' + by = -5e^{-2x}.$$

Para los valores de a y b encontrados, dar las soluciones de la ecuación diferencial.

Ejercicio 3.2.4: Dar las soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 35y = e^{-x}$ que cumplan que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Ejercicio 3.2.5: El movimiento de un cuerpo de masa m pendiendo de un resorte está gobernado por la ecuación

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

donde y es el desplazamiento del cuerpo a partir de su posición de equilibrio, cy' es la fuerza de rozamiento, ky es la fuerza que ejerce el resorte y $F(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo.

- a. Describir el movimiento en el caso de *vibración libre* ($F(t) = 0$) y *sin rozamiento* ($c = 0$).
- b. Si $F(t) = A\cos(wt)$, describir el comportamiento en el caso de no haber rozamiento ($c = 0$). Notar que si $w_0 = \sqrt{k/m} \neq w$ la solución de la ecuación homogénea puede escribirse como: $C\cos(w_0t - \delta)$ para un δ adecuado y

$$y_p(t) = \frac{A}{m(w_0^2 - w^2)}\cos(wt)$$

es una solución particular. Aquí, $w_0/2\pi$ suele denominarse la frecuencia natural del sistema mientras que $w/2\pi$ se denomina la frecuencia de la fuerza externa.

- c. Describir el comportamiento en el caso $F(t) = 0, c \neq 0$.

Aproximación local de funciones

El objetivo de este capítulo es aproximar funciones localmente mediante polinomios. Ya conocemos el concepto de recta tangente, aquella que recta que mejor aproxima a una función localmente alrededor de un punto. Recordemos que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa x_0 es la recta de pendiente $f'(x_0)$ que corta al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$, es decir que comparte con la función f tanto el valor en x_0 como el de su derivada en x_0 .

Generalizaremos esta idea para polinomios de orden superior y veremos que bajo ciertas hipótesis estos polinomios aproximan tanto como deseemos a la función cerca de un punto dado. Estudiaremos también la fórmula de Lagrange para estimar el error cometido por estas aproximaciones. El capítulo hace incapié en la importancia de acotar adecuadamente el error cometido al aproximar una función mediante polinomios.

4.1 Polinomio de Taylor

Definición: Sea f una función n veces derivable, el *polinomio de Taylor* de f de orden n alrededor de x_0 es un polinomio de grado menor o igual a n , que notaremos P_n , que satisface que la función y el polinomio coinciden en x_0 y sus respectivas derivadas hasta orden n también coinciden en x_0 :

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P'_n(x_0) &= f'(x_0) \\ P''_n(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

En la siguiente proposición veremos una fórmula explícita para obtener el polinomio de Taylor de orden n de una función f alrededor de x_0 que solo dependerá del valor de f y sus primeras n derivadas evaluadas en x_0 .

Proposición sobre la fórmula del polinomio de Taylor (4.1.1): Si f es una función n veces derivable, el polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de x_0 puede escribirse de la forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

o usando la notación de sumatoria

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Demostración: Comencemos observando que el polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0 puede escribirse como sigue:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n,$$

y si usamos la notación de sumatoria, lo escribimos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k.$$

Debemos ver que los coeficientes del polinomio son:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Como $P_n(x_0) = c_0$ pues se anulan todos los otros términos, se tiene que $c_0 = f(x_0)$. Observemos que

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1},$$

o también podemos escribir

$$P'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Por lo tanto, cuando evaluamos en x_0 , vale $f'(x_0) = P'_n(x_0) = c_1$.

Para obtener el segundo coeficiente volvemos a derivar

$$P_n''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + 4 \cdot 3c_4(x - x_0)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2},$$

que también podemos escribir

$$P_n''(x) = \sum_{k=2}^n k \cdot (k-1) \cdot c_k(x - x_0)^{k-2}.$$

Si evaluamos en x_0 tenemos $f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2! \cdot c_2$. Luego $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$.

Si continuamos derivando, podemos ver que la derivada j -ésima del polinomio es

$$P_n^{(j)} = \sum_{k=j}^n k \cdots (k-j+1) \cdot c_k(x - x_0)^{k-j}$$

que, evaluada en x_0 , el único término que no se anula es el correspondiente a $k = j$ y resulta que $f^{(j)}(x_0) = P_n^{(j)}(x_0) = j! \cdot c_j$.

Despejando obtenemos que $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ para cualquier j entre 0 y n , que era lo que debíamos probar.

□

Observación: Si la derivada n -ésima de una función f se anula en x_0 , entonces el grado del polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0 de la función f es menor que n .

Definición: Al polinomio de Taylor de una función f desarrollado alrededor de 0 lo denominamos *polinomio de Maclaurin* de f .

Ejemplo 4.1.2: Polinomio de Maclaurin de la función exponencial

Calcular el polinomio de Maclaurin, P_n , de orden n , de la función $f(x) = e^x$.

Resolución: Es claro que la derivada de orden k de la función es $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo k natural. Además, si evaluamos la derivada k -ésima en 0, tenemos que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Luego, si reemplazamos en la fórmula del polinomio de Maclaurin obtenemos

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

En la figura 4.1 podemos ver el gráfico de la función $f(x) = e^x$ y el de sus polinomios de Maclaurin de orden 1, 2, 3 y 4 y podemos observar que a medida que se aumenta el orden del polinomio la aproximación local mejora.

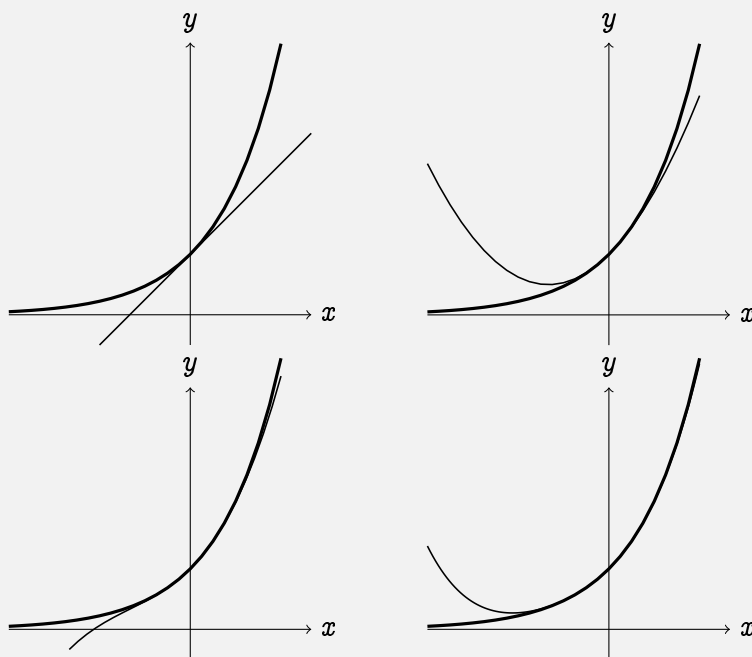


Figura 4.1: $f(x) = e^x$ y sus polinomios de Maclaurin de orden 1, 2, 3 y 4.

Ejemplo 4.1.3: Polinomio de Maclaurin del seno y del coseno

Calcular P_{2n+1} y Q_{2n} los polinomios de Maclaurin de orden $2n+1$ y $2n$ de las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{cos}(x)$ respectivamente.

Resolución: Sabemos que las derivadas de $f(x)$ son: $f'(x) = \text{cos}(x)$, $f''(x) = -\text{sen}(x)$, $f^{(3)}(x) = -\text{cos}(x)$, $f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$, ...

Dado que $\text{sen}(0) = 0$ y $\text{cos}(0) = 1$, obtenemos:

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Análogamente, el polinomio de Maclaurin para el coseno es:

$$Q_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Observemos que $P'_{2n+1} = Q_{2n}$, es decir que la derivada del polinomio de Maclaurin del seno es el polinomio de Maclaurin del coseno. Esto responde a un hecho general que estudiaremos más adelante.

En la figura 4.2 podemos ver el gráfico de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y sus polinomios de Maclaurin de orden 1, 3 y 5.

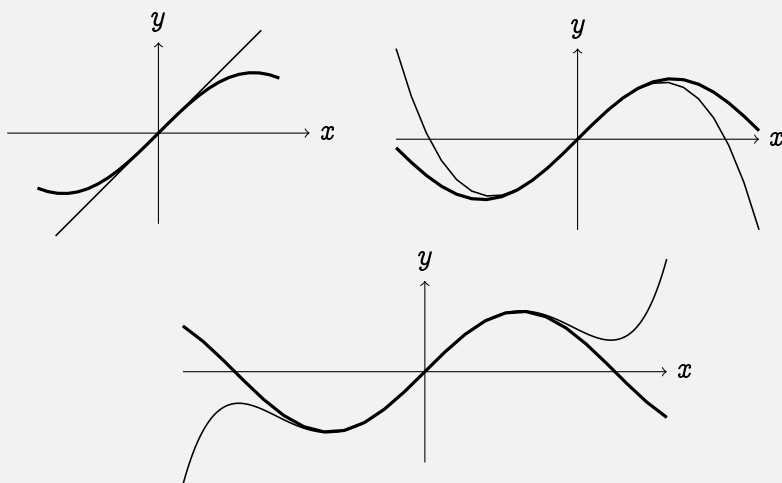


Figura 4.2: $f(x) = \text{sen}(x)$ y sus polinomios de Maclaurin de orden 1, 3 y 5.

Teorema de Taylor (4.1.4): Si f es una función n veces derivable en x_0 y P_n es su polinomio de Taylor de orden n en x_0 , entonces existe una función g , continua en x_0 y tal que $g(x_0) = 0$, que satisface la siguiente igualdad:

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n g(x).$$

Recíprocamente, si f y g son dos funciones n veces derivables en x_0 , $g(x_0) = 0$ y P es un polinomio de grado menor o igual que n que satisfacen la igualdad anterior, entonces P es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0 .

Ejemplo 4.1.5: Aplicación de Taylor al cálculo de límites

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Resolución: El límite corresponde a una indeterminación de tipo cero sobre cero. Para calcular el límite podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Sin embargo, volveríamos a obtener una indeterminación. Recién a la tercera aplicación de la regla de L'Hôpital obtendríamos el resultado. Otra forma de resolver la indeterminación es recordando que conocemos el polinomio de Maclaurin de orden 3 de la función exponencial y, además, por el teorema anterior, sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 g(x)$$

para una función g que continua en 0 y que cumple $g(0) = 0$.

Reemplazando en el límite original y simplificando, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3 g(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + g(x) \right) = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 4.1.6: Polinomio de Taylor con parámetros

Hallar los números reales a , b y c de modo que $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - 3$ sea el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de -2 de la función $f(x) = a(x+2) + e^{b(x+2)} + \ln(3+cx)$.

Resolución: Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de -2 tenemos que se cumplen:

$$f(-2) = P_2(-2) \tag{4.1}$$

$$f'(-2) = P_2'(-2) \tag{4.2}$$

$$f''(-2) = P_2''(-2). \tag{4.3}$$

Las primeras dos derivadas de f son: $f'(x) = a + be^{b(x+2)} + \frac{c}{3+cx}$ y $f''(x) = b^2e^{b(x+2)} - \frac{c^2}{(3+cx)^2}$.

Las derivadas de orden 1 y 2 de P_2 son: $P_2'(x) = 3x + 1$ y $P_2''(x) = 3$.

Reemplazando en las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) a x por -2 tenemos respectivamente las siguientes igualdades:

$$1 + \ln(3 - 2c) = 1$$

$$a + b + \frac{c}{3 - 2c} = -5$$

$$b^2 - \frac{c^2}{(3 - 2c)^2} = 3$$

De la ecuación (4.1) se deduce que $c = 1$. Lo reemplazamos en (4.3) y obtenemos que $b = 2$ ó $b = -2$.

Si $b = 2$ despejando en (4.2), resulta que $a = -8$.

Del mismo modo si $b = -2$, $a = -4$.

Por lo tanto, los números pedidos son $a = -8$, $b = 2$ y $c = 1$, ó $a = -4$, $b = -2$ y $c = 1$.

Ejemplo 4.1.7: Polinomio de Taylor

Calcular el polinomio de Taylor Q_2 de orden 2 alrededor de -2 de la función $g(x) = 2 - x + e^{f(x+1)}$ sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de -1 es $P_2(x) = 3 + 2x - x^2$.

Resolución: Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de -1 , si derivamos P_2 y lo evaluamos en -1 , sabemos que $f(-1) = P_2(-1) = 0$, $f'(-1) = P_2'(-1) = 4$ y $f''(-1) = P_2''(-1) = -2$.

Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de -2 necesitamos conocer los valores $g(-2)$, $g'(-2)$ y $g''(-2)$.

Observemos que el valor de g en -2 depende del valor de f en -1 :

$$g(-2) = 2 - (-2) + e^{f(-2+1)} = 4 + e^{f(-1)} = 4 + e^0 = 5.$$

Además la primera derivada de g es

$$g'(x) = -1 + f'(x+1)e^{f(x+1)}$$

que al evaluarla en -2 , obtenemos

$$g'(-2) = -1 + f'(-1)e^{f(-1)} = -1 + 4 = 3.$$

La segunda derivada de g es

$$g''(x) = f''(x+1)e^{f(x+1)} + (f'(x+1))^2 e^{f(x+1)},$$

y al evaluarla en -2 , vale

$$g''(-2) = f''(-1)e^{f(-1)} + (f'(-1))^2 e^{f(-1)} = -2 + 4^2 = 14.$$

Concluimos que el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de -2 es

$$Q_2(x) = 5 + 3(x+2) + \frac{14}{2}(x+2)^2.$$

Ejemplo 4.1.8: Polinomio de Taylor

Dada una función f con derivadas continuas que cumple $f(1) = 0$ y que $(f(x))^2 + x - 1 = \sin(f(x))$, calcular su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de 1.

Resolución: Para encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de 1 nos resta conocer los valores $f'(1)$ y $f''(1)$.

Como sabemos que f satisface la ecuación $(f(x))^2 + x - 1 = \sin(f(x))$, derivando en ambos miembros tenemos que

$$2f(x)f'(x) + 1 = f'(x)\cos(f(x)).$$

Por lo tanto, si la evaluamos en 1, obtenemos

$$2f(1)f'(1) + 1 = f'(1)\cos(f(1)).$$

Usando que $f(1) = 0$ y que $\cos(0) = 1$ concluimos que $f'(1) = 1$.

Volvemos a derivar:

$$2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) = f''(x)\cos(f(x)) - (f'(x))^2\sin(f(x))$$

y evaluando nuevamente en 1 nos queda que $f''(1) = 2$.

Finalmente el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de 1 resulta ser

$$P_2(x) = (x - 1) + (x - 1)^2.$$

Ejercicios

Ejercicio 4.1.1: Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de f y estimar $f(0,23)$ para las siguientes funciones:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| a. $f(x) = e^x$. | d. $f(x) = \sqrt{1+x}$. |
| b. $f(x) = e^{2x}$. | e. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 2$. |
| c. $f(x) = e^{-3x}$. | f. $f(x) = \sin(2x)$. |

Ejercicio 4.1.2: Hallar el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del punto a . Utilizar el polinomio hallado en c. para estimar $\ln(1,1)$, en d. para estimar $\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$, y en e. para estimar e y en f. para $\sqrt{e}$.

- $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, $n = 3$, $a = 1$.
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 3$, $a = 1$.
- $f(x) = \ln(x)$, $n = 4$, $a = 1$.
- $f(x) = \sin(x)$, $n = 4$, $a = \frac{\pi}{2}$.
- $f(x) = e^x$, $n = 3$, $a = 0$.
- $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$, $a = 1$.

Ejercicio 4.1.3: Hallar el polinomio de Maclaurin de orden n de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Luego usarlo con $n = 4$ para aproximar $f(0,1)$, $f(0,5)$, $f(0,9)$

y $f(2)$. Comparar los resultados obtenidos con el valor verdadero. ¿Qué observa en este ejemplo?

Ejercicio 4.1.4: Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $a = -1$ de $h(x) = f(x)g(x)$ sabiendo que $P(x) = -2x^3 - 4x^2 - x + 4$ y $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ son los polinomios de Taylor de orden 3 de f y g , respectivamente, alrededor de $a = -1$.

Ejercicio 4.1.5: Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $a = 2$ de la función $\ln(f^2(x))$ sabiendo que $P(x) = 3x^2 - 9x + 7$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $a = 2$.

Ejercicio 4.1.6: Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $a = 3$ de $f(2x - 5)$ sabiendo que $P(x) = 2x^2 - 5x + 5$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de f alrededor de $a = 1$.

Ejercicio 4.1.7: Hallar los valores de k y a de modo que la función $f(x) = \sqrt[4]{kx + 1}$ tenga como polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ a $p(x) = 1 + ax - 6x^2$.

Ejercicio 4.1.8: Sea $P(x) = -x^3 + 3x + 4$ el polinomio de Taylor de orden 4 de f alrededor de $a = -1$. Probar que f tiene un mínimo local en $x = -1$ y calcular $f(-1)$ y $f^{(4)}(-1)$.

Sugerencia: usar el criterio de la derivada segunda.

Ejercicio 4.1.9: Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $a = -2$ de $f(x) = x \cdot g(3x + 7)$ sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $a = 1$ es $p(x) = 1 - x + x^2$.

Ejercicio 4.1.10: Calcular los siguientes límites usando la fórmula de Maclaurin.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(x) - 6x + x^3}{6x^5}.$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24 \cos(x) - 24 + 12x^2 - x^4}{24x^6}.$$

Ejercicio 4.1.11: Si $p(x) = 1 + x - 3x^2$ es el polinomio de Taylor de segundo orden de una función infinitamente derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alrededor de $a = 1$, construir el polinomio de Maclaurin de primer orden de la función $g(x) = f(x^2 - x + 1) + \int_1^{x^3 + 2x + 1} f(t) dt$.

Ejercicio 4.1.12: Hallar los polinomios de Maclaurin de orden 2 de las siguientes funciones:

$$\text{a. } f(x) = \int_0^{2x} \sqrt{1 + u^4} du.$$

$$\text{b. } g(x) = \int_0^{\sin^2(x)} e^u (1 - u)^{-1} du.$$

4.2 Error de aproximación

En esta sección estudiaremos el error que se comete al aproximar una función f por su polinomio de Taylor. Para eso necesitamos algunas definiciones. Previamente veremos algunas técnicas de acotación, con el objetivo de poder dar una cota para el error que se comete al aproximar una función por medio de su polinomio de Taylor.

Técnicas de acotación

La siguiente desigualdad nos será de utilidad para realizar acotaciones.

Propiedad de la desigualdad triangular (4.2.1): Dados dos números reales a y b se cumple que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Ejemplo 4.2.2: Desigualdad triangular

Dar una cota para $|2 \cos(x) - 5 \operatorname{sen}(x)|$

Resolución: Usamos primero la desigualdad triangular:

$$|2 \cos(x) - 5 \operatorname{sen}(x)| \leq |2 \cos(x)| + |-5 \operatorname{sen}(x)|$$

Recordando que el módulo se distribuye con respecto al producto y que $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ podemos deducir que

$$|2 \cos(x) - 5 \operatorname{sen}(x)| \leq |2 \cos(x)| + |-5 \operatorname{sen}(x)| \leq 2 + 5 = 7$$

Por lo tanto, una cota posible es 7.

Veamos otra técnica posible para encontrar cotas que se basara en el Teorema de Weierstrass (ver teorema 1.7.1). Si tenemos que buscar una cota para una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado, el Teorema de Weierstrass nos asegura que la función alcanza su máximo y su mínimo valor en dicho intervalo.

Ejemplo 4.2.3: Cotas

Dar una cota para $|(-x + 2)e^x|$ con $x \in [-2, 3]$.

Resolución: Como dijimos previamente, en este ejemplo usaremos el Teorema de Weierstrass para encontrar una cota. Consideremos entonces la función $f(x) = (-x + 2)e^x$ que es continua en $\mathbb{R}$ y en particular lo es en $[-2, 3]$. Por el Teorema de Weierstrass la función f alcanza sus valores absolutos en el intervalo dado. Para buscarlos alcanza con analizar el valor de la función en los puntos críticos y en los bordes del intervalo.

La derivada de la función es $f'(x) = (-x + 1)e^x$. Luego el único punto crítico es 1. Como $f(1) = e$, $f(-2) = 4e^{-2}$ y $f(3) = -e^3$, podemos afirmar que $-e^3 \leq f(x) \leq e$ para todo $x \in [-2, 3]$.

En la figura 4.3 puede verse el gráfico de las funciones $f(x)$ y $|f(x)|$.

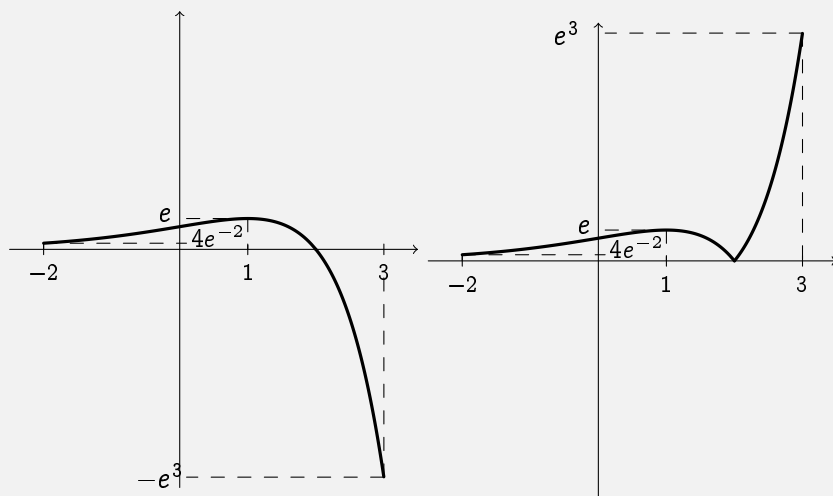


Figura 4.3: Ejemplo 4.2.3.

Notemos que al tomar módulo de f tenemos la desigualdad

$$|(-x + 2)e^x| = |f(x)| \leq e^3$$

para todo $x \in [-2, 3]$. Recordemos que $e < 3$, entonces una cota para $|(-x + 2)e^x|$ en el intervalo $[-2, 3]$ es 27.

Ejemplo 4.2.4: Diferentes cotas

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$ y sea I el intervalo $[-\pi/2, 0]$, acotar el valor de $|f(x)|$ en I de la mejor manera posible.

Resolución: Si simplemente quisiéramos encontrar *una* cota para $|f(x)|$ en I podríamos usar la desigualdad triangular, acotando del siguiente modo:

$$|\operatorname{sen}(x) - \cos(x)| \leq |\operatorname{sen}(x)| + |\cos(x)| \leq 1 + 1 = 2.$$

Sin embargo, la cota que encontramos no es la mejor posible. Para dar la mejor cota realicemos un análisis de la función $f(x)$ en I .

La derivada de f es $f'(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ que solo se anula en $-\pi/4$ dentro del intervalo I . Como la función f es continua en I por el Teorema de Weierstrass la función f alcanza su máximo y su mínimo valor absoluto en dicho intervalo. Luego evaluamos en el punto crítico y en los bordes del intervalo obteniendo los siguientes resultados:

$$f(-\pi/4) = \operatorname{sen}(-\pi/4) - \cos(-\pi/4) = -\sqrt{2},$$

$$f(-\pi/2) = \operatorname{sen}(-\pi/2) - \cos(-\pi/2) = -1,$$

$$f(0) = \operatorname{sen}(0) - \cos(0) = -1.$$

En la figura 4.4 podemos observar los gráficos de $f(x)$ y de $|f(x)|$ y deducir que $|f(x)| = |\operatorname{sen}(x) - \cos(x)| \leq \sqrt{2}$.

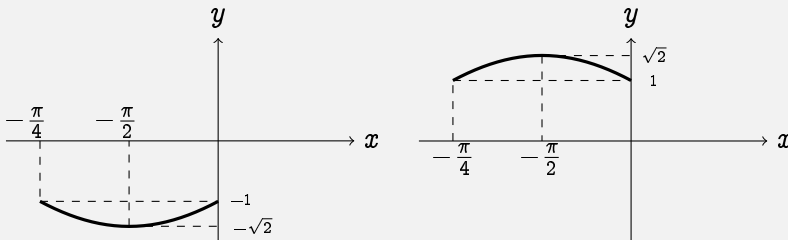


Figura 4.4: Gráfico de una función y su módulo.

Por lo tanto, la mejor cota para $|f(x)|$ que podemos dar es $\sqrt{2}$.

Estimación del error al aproximar funciones

Definición: El error cometido (por defecto o por exceso) al aproximar $f(x)$ utilizando su polinomio de Taylor de orden n alrededor de x_0 P_n es $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ y lo llamamos *resto de Taylor* de orden n de f .

El siguiente teorema nos da una fórmula para el resto de Taylor de orden n de una función f derivable $n + 1$ veces.

Teorema de Lagrange para el resto de Taylor (4.2.5): Si f es una función $n + 1$ veces derivable en el intervalo (a, b) , P_n el polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de $x_0 \in (a, b)$ y $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ su resto de Taylor, entonces para cada $x \in (a, b)$ existe un número real c entre x_0 y x que satisface:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Demostración: Para demostrar este teorema usaremos reiteradamente el Teorema de valor medio de Cauchy (ver Teorema 1.5.6).

Consideremos $R_n(x)$ y $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$ que son funciones continuas y $n + 1$ veces derivables en los intervalos (x_0, x) y (x, x_0) si $x_0, x \in (a, b)$.

Por el Teorema de valor medio de Cauchy, existe un c_1 entre x_0 y x tal que

$$\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Como $R_n(x_0) = 0$ y $g(x_0) = 0$, tenemos que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{R'_n(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n}.$$

Repitiendo este argumento con $\frac{R'_n(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}$ tenemos que existe un número c_2 entre x_0 y c_1 (en particular entre x_0 y x) tal que

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n} = \frac{R_n^{(2)}(c_2)}{(n+1)n(c_2 - x_0)^{n-1}}.$$

Usando el Teorema de valor medio de Cauchy $n + 1$ veces obtenemos que existe un número c entre x_0 y x tal que

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \quad (4.4)$$

Como P_n es un polinomio de grado menor o igual a n , su derivada $n + 1$ -ésima es el polinomio nulo

$$R_{n+1}^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - P_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c).$$

Reemplazándolo en la ecuación (4.4) y despejando, obtenemos la fórmula deseada:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

□

La siguiente observación nos muestra que si las funciones son “buenas” en un entorno alrededor de x_0 , el polinomio de Taylor de orden suficientemente grande aproxima al valor de f tanto como querramos.

Observación: Bajo las hipótesis del teorema anterior y si las derivadas de f están acotadas uniformemente por una constante $M \in \mathbb{R}$ para todo $x \in (a, b)$, en símbolos, $|f^{(k)}(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$ y para todo $k \in \mathbb{R}$, entonces el error tiende a cero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Para ver esto, usamos la fórmula para el resto dada por el Teorema de Lagrange para el resto de Taylor (ver 4.2.5). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in (a, b)$ que cumple:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c_n)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Sabiendo que las derivadas están acotadas uniformemente por M , son verdaderas las siguientes desigualdades:

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c_n) \right| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Consideramos la sucesión $A_n = \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ y calculamos su límite cuando n tiende a $+\infty$ usando el Criterio de D'Alembert para sucesiones (ver criterio 5.6.5). Luego debemos calcular:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{|x - x_0|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0 < 1.$$

Por el Criterio de D'Alembert, podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Si tomamos límite en la desigualdad anterior, tenemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Por lo tanto, concluimos que para cada $x \in (a, b)$ el error tiende a cero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Ejemplo 4.2.6: Acotación del error

Sean $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$, P_3 el polinomio de MacLaurin de orden tres de f y el intervalo $I = [-\pi/2, 0]$. Dar la mejor cota que pueda para el error cometido al aproximar f con P_3 en I .

Resolución: Las primeras tres derivadas de f son $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$, $f''(x) = -\sin(x) + \cos(x)$ y $f^{(3)}(x) = -\cos(x) - \sin(x)$. Las evaluamos en 0 obteniendo $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ y $f^{(3)}(0) = 1$. Luego, el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f es

$$P_3(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Recordemos que, por el Teorema de Lagrange para el resto de Taylor (ver 4.2.5), para dar una cota del error cometido, debemos acotar:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| = \frac{|f^{(4)}(c)|}{24} x^4$$

donde $x \in I$ y c está entre x y 0. En particular $c \in I$.

En el ejemplo 4.2.4 dimos dos cotas posibles, en el intervalo I , para

$$|f^{(4)}(x)| = |f(x)| = |\sin(x) - \cos(x)|.$$

Usemos la mejor de esas cotas.

Por otro lado, como x^4 es una función decreciente en el intervalo I , los símbolos de la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$$

se invierten si le aplicamos la función x^4 a dicha desigualdad y obtenemos

$$0 \leq x^4 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

Finalmente, usando todas las cotas que encontramos, podemos afirmar que

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(c)|}{24} x^4 \leq \frac{\sqrt{2}}{24} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{384}.$$

Luego, la mejor cota que pudimos encontrar para el error es $\frac{\sqrt{2}\pi^4}{384}$.

Ejemplo 4.2.7: Aproximación de e

Usar el polinomio de Taylor de e^x para aproximar el valor de e con 5 dígitos exactos.

Resolución: Aproximaremos e con P_n un polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$ alrededor de 0 de orden n con n lo suficientemente grande de modo que el error que se comete al aproximar $e = f(1)$ por $P_n(1)$ sea menor que $10^{-5} = 0,00001$. Veremos que, en este caso, es posible asegurar que los primeros 5 dígitos coinciden.

Recordemos que al derivar n veces f obtenemos $f^{(n)}(x) = e^x$. Por la fórmula obtenida del Teorema de Lagrange para el resto de Taylor, el error cometido al aproximar $f(1)$ con $P_n(1)$ es:

$$|f(1) - P_n(1)| = |R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

donde $c \in (0, 1)$. Como $e < 3$, podemos afirmar

$$|f(1) - P_n(1)| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Busquemos un número natural n de modo que valga la desigualdad

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,00001$$

y veremos que ese valor de n cumple lo que pide el enunciado. Probemos con distintos valores de n hasta encontrar el primero que cumpla la desigualdad:

n	$\frac{3}{(n+1)!}$
1	1,5
2	0,5
3	0,125
4	0,025
5	0,004166666
6	0,000595238
7	0,000074404
8	0,000008267

El primero que lo cumple es $n = 8$. Por otro lado, recordemos que calculamos el polinomio de Maclaurin de orden 8 de $f(x) = e^x$ en el ejemplo (4.1.2) y resulta ser

$$P_8(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}.$$

Luego

$$P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320}$$

$$P_8(1) = 2,7182787698412$$

aproxima a $f(1) = e$ con un error menor que 10^{-5} . Esto quiere decir que

$$P_8(1) - 0,00001 < e < P_8(1) + 0,00001$$

o equivalentemente

$$2,7182787698412 - 0,00001 < e < 2,7182787698412 + 0,00001$$

$$2,7182687698412 < e < 2,7182887698412.$$

Como al restarle o sumarle 0,00001 a $P_8(1)$ los primeros 5 dígitos no cambian, podemos afirmar que 2,7182 aproxima a e de modo que coinciden en al menos 5 dígitos.

Ejemplo 4.2.8: Estimación del error

Sea $f(x) = 1 + \frac{4}{1+x} + \cos(3x)$.

1. Encontrar P_3 el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f .
2. Estimar el error que se comete al aproximar $f(0,2)$ con $P_3(0,2)$.

Resolución:

1. Las derivadas sucesivas de la función f son

$$f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2} - 3\sin(3x)$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3} - 9\cos(3x)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-24}{(x+1)^4} + 27\sin(3x).$$

Tenemos que $f(0) = 6$, $f'(0) = -4$, $f''(0) = -1$ y $f^{(3)}(0) = -24$ y que el polinomio de Maclaurin de orden 3 resulta ser:

$$P_3(x) = 6 - 4x - \frac{x^2}{2} - 4x^3$$

2. Recordemos que para estimar el error cometido al aproximar $f(0, 2)$ con $P_3(0, 2)$ debemos dar una cota para:

$$|R_3(0, 2)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| = \frac{|f^{(4)}(c)|}{24} x^4 \text{ con } c \in (0, 0, 2).$$

Como $f^{(4)}(x) = \frac{96}{(x+1)^5} + 81 \cos(3x)$, podemos reemplazar la expresión del resto en la igualdad anterior y obtenemos:

$$|R_3(0, 2)| = \frac{\left| \frac{96}{(c+1)^5} + 81 \cos(3c) \right|}{24} 0, 2^4$$

Acotemos la expresión del numerador usando la desigualdad triangular:

$$\left| \frac{96}{(c+1)^5} + 81 \cos(3c) \right| \leq \left| \frac{96}{(c+1)^5} \right| + 81 |\cos(3c)|.$$

Por un lado, sabemos que $|\cos(3c)| \leq 1$ y por otro, acotamos el primer término:

$$0 < c < 0, 2$$

$$1 < c + 1 < 1, 2.$$

Aplicamos la función x^{-5} que es decreciente y por lo tanto se invierte el orden de la desigualdad anterior:

$$1^{-5} > (c+1)^{-5} > 1, 2^{-5}$$

$$1 > \frac{1}{(c+1)^5} > 1, 2^{-5}$$

$$96 > \frac{96}{(c+1)^5} > 96 \cdot 1, 2^{-5}.$$

Entonces, volviendo atrás, tenemos que

$$\left| \frac{96}{(c+1)^5} \right| + 81 |\cos(3c)| = \frac{96}{(c+1)^5} + 81 |\cos(3c)| < 96 + 81 = 177.$$

Concluimos que el resto de Taylor cumple

$$|R_3(0, 2)| \leq \frac{\left| \frac{96}{(c+1)^5} \right| + 81 |\cos(3c)|}{24} \left(\frac{1}{5} \right)^4 < \frac{177}{15000} = 0,0118.$$

Finalmente podemos asegurar que el error que cometemos al realizar la aproximación de $f(0, 2)$ con $P_3(0, 2)$ es menor que 0,0118.

Ejemplo 4.2.9: Acotación del error

Sea $f(x) = \ln(1 + 4x)$. Mostrar que el error que se comete al calcular $\ln(1, 5)$ mediante el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f es menor a 2^{-6} .

Resolución: Recordemos que, por el Teorema de Lagrange para el resto de Taylor (ver 4.2.5), existe c entre 0 y x tal que la expresión del resto orden 3 es:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4.$$

Las primeras cuatro derivadas de la función f son

$$f'(x) = \frac{4}{1 + 4x}$$

$$f''(x) = \frac{-16}{(1 + 4x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{128}{(1 + 4x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-1536}{(1 + 4x)^4}.$$

El resto satisface, para algún c entre 0 y x la siguiente igualdad:

$$R_3(x) = \frac{-1536}{4!(1 + 4c)^4} x^4.$$

Como queremos aproximar $\ln(1, 5)$ con P_3 , el polinomio de Maclaurin de f de orden 3, buscamos el valor de x en el que debemos evaluar el polinomio P_3 . Buscamos x de modo que cumpla

$$f(x) = \ln(1, 5)$$

$$\ln(1 + 4x) = \ln(1, 5).$$

Por lo tanto, $x = 1/8$ y vale que

$$\left| R_3 \left(\frac{1}{8} \right) \right| = \left| \frac{-1536}{4!(1+4c)^4} \left(\frac{1}{8} \right)^4 \right| = \frac{1536}{(1+4c)^4 4! 8^4} = \frac{1}{(1+4c)^4} \cdot 2^{-6}.$$

Para dar una cota del resto, buscamos los valores absolutos en el intervalo $[0, 1/8]$ de la función continua

$$g(x) = \frac{1}{(1+4x)^4}.$$

Por el Teorema de Weierstrass (ver 1.7.1), al ser g una función continua en el intervalo $[0, 1/8]$, g alcanza su valor máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo. Recordemos que estos extremos los encontraremos entre los puntos críticos de g y los bordes del intervalo, 0 y $1/8$.

Derivando obtenemos que, para todo $x \in (0, 1/8)$, la derivada de g cumple

$$g'(x) = -\frac{4}{(1+4x)^5} < 0$$

y, por lo tanto, g es estrictamente decreciente en $[0, 1/8]$. Lo que implica que si $c \in (0, 1/8)$ entonces

$$0 < g(1/8) < \frac{1}{(1+4c)^4} < g(0) = 1.$$

Usemos la cota que obtuvimos para g para dar una cota del resto. Si $c \in (0, 1/8)$, entonces

$$|R_3(1/8)| = \frac{1}{(1+4c)^4} \cdot 2^{-6} < 1 \cdot 2^{-6}.$$

Podemos afirmar que, al realizar la aproximación $\ln(1, 5) \sim P_3 \left(\frac{1}{8} \right)$, el error que cometemos es menor a 2^{-6} .

Ejemplo 4.2.10: Acotación del error

Sea $f(x) = -2 \ln \left(\frac{x+1}{2} \right) + \frac{2}{x+1}$.

1. Calcular el polinomio $P_3(x)$ de Taylor de orden 3 alrededor de 1.
2. Dar una cota para el error que se comete al calcular $f(x)$ para $x \in [0, 4]$ con el polinomio encontrado anteriormente.

Resolución:

1. Las primeras tres derivadas de f son

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3}, \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{4}{(x+1)^3} - \frac{12}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Sabemos que $f(1) = 1$, $f'(1) = -3/2$, $f''(1) = 1$ y $f^{(3)}(1) = -5/4$. Entonces, el polinomio de Taylor de orden 3 de f alrededor de 1 es

$$P_3(x) = 1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{24}(x-1)^3.$$

2. Para dar una cota del error cometido al aproximar f por P_3 en el intervalo $[0, 4]$ debemos acotar el resto de Taylor. Sabemos que para cada $x \in [0, 4]$ existe c entre 1 y x tal que el resto de Taylor en x cumple

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 = \frac{\frac{12}{(c+1)^4} + \frac{48}{(c+1)^5}}{24}(x-1)^4 = \\ &= \left[\frac{1}{2(c+1)^4} + \frac{2}{(c+1)^5} \right] (x-1)^4 = \frac{c+5}{2(c+1)^5} (x-1)^4. \end{aligned}$$

Observemos que, como c se encuentra entre 1 y x y $x \in [0, 4]$, entonces $c \in (0, 4)$ y cumple:

$$\frac{c+5}{2(c+1)^5} > 0.$$

Para estimar el error, debemos acotar la siguiente expresión para $x \in [0, 4]$ y $c \in (0, 4)$:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{c+5}{2(c+1)^5} (x-1)^4 \right| = \frac{c+5}{2(c+1)^5} (x-1)^4$$

Primero buscamos una cota para el primer factor. Consideremos la función

$$g(x) = \frac{x+5}{2(x+1)^5}$$

y busquemos su imagen en $(0, 4)$. Derivamos g :

$$g'(x) = \frac{2(x+1)^5 - 20(x+5)(x+1)^4}{4(x+1)^{10}} = \frac{-2x-12}{(x+1)^6}.$$

Buscamos sus puntos críticos en $(0, 4)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-2x-12}{(x+1)^6} = 0.$$

Como el único cero de g' es -6 , g no tiene puntos críticos en $(0, 4)$. Notemos que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 4)$, entonces g es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, 4)$. Podemos afirmar que si

$$0 < c < 4$$

entonces se cumplen las desigualdades que siguen:

$$g(4) < g(c) < g(0)$$

$$\frac{4+5}{2(4+1)^5} < \frac{c+5}{2(c+1)^5} < \frac{0+5}{2(0+1)^5}$$

$$\frac{9}{6250} < \frac{c+5}{2(c+1)^5} < \frac{5}{2}.$$

Ahora trabajemos con el segundo factor que debemos acotar, es decir demos una cota para $(x - 1)^4$ con $x \in [0, 4]$. La función $(x - 1)^4$ es decreciente en $(-\infty, 1]$ y creciente en $[1, +\infty)$. Por lo tanto, si $0 \leq x \leq 1$ entonces vale que

$$(0 - 1)^4 \geq (x - 1)^4 \geq (1 - 1)^4$$

$$1 \geq (x - 1)^4 \geq 0.$$

En cambio, si $1 \leq x \leq 4$ resulta que

$$(1 - 1)^4 \leq (x - 1)^4 \leq (4 - 1)^4$$

$$0 \leq (x - 1)^4 \leq 81.$$

Luego, podemos afirmar que $(x - 1)^4 \leq 81$ si $x \in [0, 4]$.

Si usamos todas las cotas que encontramos, podemos asegurar que si $x \in [0, 4]$ es verdadera la siguiente afirmación

$$|R_3(x)| = \frac{c + 5}{2(c + 1)^5} (x - 1)^4 < \frac{5}{2} \cdot 81 = \frac{405}{2}.$$

Concluimos que $405/2$ es una cota posible para el error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_3(x)$ para $x \in [0, 4]$.

Ejemplo 4.2.11: Acotación del error

Sea $f(x) = \sin(3x - 3) + 2x^3 + x^2 + x + 1$.

1. Calcular $P_3(x)$, el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de 1.
2. Dar un intervalo alrededor de 1 para el cual el error que se produce al calcular $f(x)$ con $P_3(x)$ sea menor o igual que $39/6000$.

Resolución:

1. Calculamos las derivadas de f que precisamos conocer:

$$f'(x) = 3 \cos(3x - 3) + 6x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = -9 \operatorname{sen}(3x - 3) + 12x + 2.$$

Luego $f(1) = 5$, $f'(1) = 12$ y $f''(1) = 14$ y el polinomio de Taylor pedido es

$$P_3(x) = 5 + 12(x - 1) + 7(x - 1)^2.$$

2. Para encontrar el intervalo que cumpla lo pedido, calculemos la derivada tercera de la función

$$f^{(3)}(x) = \frac{-27 \cos(3x - 3) + 12}{6}$$

y recordemos que existe c entre 1 y x tal que

$$R_3(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x - 1)^3 = \frac{-27 \cos(3c - 3) + 12}{6}(x - 1)^3.$$

Luego el error que se produce al aproximar $f(x)$ con $P_3(x)$ es

$$|R_3(x)| = \left| \frac{-27 \cos(3c - 3) + 12}{6}(x - 1)^3 \right| =$$

$$\frac{|-27 \cos(3c - 3) + 12|}{6} |x - 1|^3.$$

Si usamos la desigualdad triangular y la propiedad distributiva del módulo con respecto al producto en el numerador es verdadera:

$$|-27 \cos(3c - 3) + 12| \leq 27 |\cos(3c - 3)| + 12 \leq 27 \cdot 1 + 12 = 39.$$

Afirmamos que para cada x podemos acotar el error cometido del siguiente modo:

$$|R_3(x)| \leq \frac{|-27 \cos(3c - 3) + 12|}{6} |x - 1|^3 \leq \frac{39}{6} |x - 1|^3.$$

Como queremos que el error en x sea menor que $39/6000$ alcanza con pedir que x cumpla

$$\frac{39}{6} |x - 1|^3 < \frac{39}{6000}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} |x - 1|^3 &< 10^{-3} \\ -\frac{1}{10} &< x - 1 < \frac{1}{10} \\ -\frac{9}{10} &< x < \frac{11}{10}. \end{aligned}$$

Como para cualquier valor de x en el intervalo $(9/10, 11/10)$ el error de calcular $f(x)$ con $P_3(x)$ es menor a $39/6000$, entonces el intervalo alrededor de 1 que buscábamos es $(9/10, 11/10)$.

Vimos en el capítulo 2 un método numérico (regla del trapecio) para aproximar el valor de una integral. Veremos ahora otro método posible usando polinomios de Taylor.

Ejemplo 4.2.12: Aproximación de una integral

Usar el polinomio de Maclaurin de orden 3 de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

para aproximar la integral definida

$$\int_0^{0,1} e^{x^2} dx.$$

Dar una cota para el error cometido con dicha aproximación.

Resolución: Observemos que $f(0) = 0$ y que e^{x^2} es una función continua. Por el Teorema Fundamental del Cálculo (ver 1.2.5), la derivada de la función es $f'(x) = e^{x^2}$. Si continuamos derivando, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2xe^{x^2}, \\ f^{(3)}(x) &= (2 + 4x^2)e^{x^2}, \\ f^{(4)}(x) &= (12x + 8x^3)e^{x^2}. \end{aligned}$$

Si evaluamos las primeras 3 derivadas en 0, resulta que $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ y $f^{(3)}(0) = 2$. Luego el polinomio de Maclaurin de orden 3

es

$$P_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Aproximamos $f(0, 1) \sim P_3(0, 1)$, obteniendo

$$\int_0^{0,1} e^{x^2} dx \sim \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{301}{3000}$$

$$\int_0^{0,1} e^{x^2} dx \sim 0,100333.$$

Para determinar cuán exacta es la aproximación que realizamos, buscamos una cota para el error:

$$\begin{aligned} |P_3(0, 1) - f(0, 1)| &= |R_3(0, 1)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} 0,1^4 \right| = \\ &= \left| \frac{(12c + 8c^3)e^{c^2}}{4!} 0,1^4 \right| = \frac{(12c + 8c^3)e^{c^2}}{4!} 0,1^4. \end{aligned}$$

donde c es un número entre 0 y 0,1.

Como la función $12x + 8x^3$ es creciente, si $0 < c < 0,1$, entonces

$$0 < 12c + 8c^3 < 12 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,1^3 = 1,208.$$

Por otro lado, e^{x^2} es una función creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Luego, si $0 < c < 0,1$ resultan verdaderas las siguientes desigualdades

$$1 = e^0 < e^{c^2} < e^{0,01} < e < 3.$$

Retomamos la acotación del error:

$$|R_3(0, 1)| = \frac{(12c + 8c^3)e^{c^2}}{4!} 0,1^4 \leq \frac{1,208 \cdot 3}{24} 0,0001 = 0,0000151.$$

Concluimos que el error que cometemos al realizar la aproximación pedida es menor a 0,0000151.

Ejercicios

Ejercicio 4.2.1: Hallar una cota para el máximo de cada expresión en el intervalo dado.

- | | |
|--|---|
| a. $ e^x + e^{-x} $ en $[0, 2]$. | f. $\left \frac{\operatorname{sen} x}{x+1} \right $ en $[0, 1]$. |
| b. $ \operatorname{tg}(x) + \sec x $ en $[-\frac{\pi}{4}, 0]$. | g. $\left \frac{x^2 + \cos(x)}{16 \ln(x)} \right $ en $[2, 3]$. |
| c. $\left \frac{e^{-x}}{x+4} \right $ en $[-8, -6]$. | h. $\left \frac{\operatorname{sen} x + \cos(x)}{2x+1} \right $ en $[0, 1.5]$. |
| d. $\left \frac{4}{x+2} \right $ en $[\frac{-3}{2}, 2]$. | i. $\left \frac{x^4 - x}{\operatorname{sen} x} \right $ en $[1, 3]$. |
| e. $\left \frac{2}{\cos(x)} \right $ en $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. | |

Ejercicio 4.2.2: Sea P_n el polinomio de Maclaurin de e^x . Determinar el orden n a utilizar para estimar $e \approx P_n(1)$ con un error menor que $5 \cdot 10^{-6}$.

Ejercicio 4.2.3: En cada caso hallar una fórmula para el resto del polinomio de Taylor de orden 6, $R_6(x)$, alrededor de a y obtener una cota para $R_6(0,5)$.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| a. $\ln(1+x)$, $a = 0$. | c. e^{-x} , $a = 0$. |
| b. $\operatorname{sen} x$, $a = 0$. | d. $\frac{1}{x-2}$, $a = 1$. |

Ejercicio 4.2.4: Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 3 y una cota del error

- | | |
|---|---|
| a. $(1+x)^{3/2}$, $x \in [-\frac{1}{10}, 0]$. | b. $(1+x)^{-1/2}$, $x \in [-\frac{5}{100}, \frac{5}{100}]$. |
|---|---|

Ejercicio 4.2.5: Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y una cota para el error en $[-\frac{5}{10}, \frac{5}{10}]$.

Ejercicio 4.2.6:

- a. Aproximar $\ln(1,5)$ con un error menor a 10^{-3} . ¿En cuántos dígitos coinciden dicha aproximación y el valor real?

- b. ¿De qué orden debería tomarse el polinomio de Taylor para que el error de aproximar $\ln(1,5)$ con dicho polinomio sea menor que 10^{-5} ? ¿Y para aproximar $\ln(2)$.

Ejercicio 4.2.7:

- a. Aproximar $\sin(1)$ con al menos 4 dígitos correctos.
- b. Dar un intervalo alrededor del 0 para el cual el error de aproximar $\sin(x)$ por el polinomio de Maclaurin de orden 10 sea menor que 10^{-5} .

Ejercicio 4.2.8: Probar que $|\sin(a+h) - \sin(a) - h \cos(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$.

Ejercicio 4.2.9: Justificar las siguientes aproximaciones y acotar el error cometido:

a. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, $|x| < 0,5$.

b. $e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$.

c. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $|x| < 0,5$.

d. $(a-x)e^{\frac{2x}{a}} \approx a+x$, $a > 0$, $|x| < a$.

Ejercicio 4.2.10: Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la curva $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ (catenaria). Mostrar que si $|x|$ es chico, la forma del hilo puede representarse aproximadamente por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

Series

En este capítulo introducimos el concepto de serie o suma infinita. Primero presentamos las series clásicas: armónicas, geométricas, telescópicas y series p . Posteriormente estudiamos los criterios de convergencia de series de términos positivos para luego pasar a estudiar las series alternadas. Finalmente introducimos las series de potencias como un caso particular de las series de funciones y estudiamos la diferencia entre convergencia absoluta y condicional.

5.1 Sumas parciales y convergencia

Motivaremos el concepto de serie o sumas infinitas con el siguiente problema, que podremos contestar con más precisión a lo largo del capítulo. Consideremos el cuadrado de lado 1, que como sabemos, su área es 1. Lo dividimos a la mitad, en dos rectángulos cuya área es $1/2$. A una de las mitades la volvemos a dividir en dos rectángulos de área $1/4$ y así siguiendo como lo muestra la Figura 5.1.

Si sumamos las áreas de los infinitos rectángulos que se van forman al ir dividiendo a la mitad el rectángulo anterior, intuitivamente cubriremos todo el cuadrado y por lo tanto tendremos:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

En esta sección daremos una definición más precisa de sumas infinitas y en el Ejemplo 5.2.5 veremos, más formalmente, que la igualdad anterior es válida.

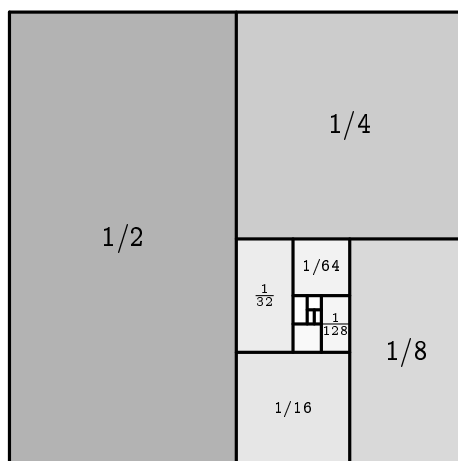


Figura 5.1: Series.

Dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, podemos formar una nueva sucesión $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, llamada la sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_N &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N. \end{aligned}$$

Definición: La N -ésima *suma parcial* de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la suma de los primeros N términos de la sucesión:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

A la sucesión de sumas parciales, $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, la llamaremos la *serie de término general* a_n y la notaremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente* si el límite de la sucesión $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ existe y es finito. En ese caso, si $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ diremos que la *suma de la serie* es S y notaremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Análogamente, si la sucesión de sumas parciales diverge, diremos que la serie es *divergente*.

Observación: Una misma notación tiene distintos significados en diferentes contextos: el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ representa por un lado a la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^N a_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ y podemos decir, por ejemplo, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Por otra parte la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ significa que la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^N a_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ es convergente y converge a $S \in \mathbb{R}$. En este contexto el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no representa a la sucesión de sumas parciales sino a su límite.

Ejercicios

Ejercicio 5.1.1: Escribir los cinco primeros términos de cada serie

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

c. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n.$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{2n+1}}{n}.$

Ejercicio 5.1.2: Escribir el término general de las siguientes series

a. $-3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots$

b. $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$

c. $\sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots$

5.2 Series clásicas

Veremos a continuación algunos ejemplos clásicos de series de las cuales conocemos su comportamiento.

Serie armónica

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se llama *serie armónica*.

Proposición (5.2.1): La serie armónica es una serie divergente.

Demostración: Para demostrar que la serie armónica es divergente utilizaremos la Proposición (1.2.4) del apéndice. Probemos que la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ es monótona y no está acotada, luego resulta divergente. $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente ya que cada término se obtiene de sumarle un número positivo al término anterior:

$$S_{N+1} = S_N + \frac{1}{N+1}.$$

Para ver que no es acotada, agrupemos los términos de la siguiente manera: si $N = 4$,

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 2.$$

Si $N = 8$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Los primeros 16 términos de la serie quedan

$$\sum_{n=1}^{16} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}.$$

Como el segundo y el tercer término son mayores o iguales a $1/4$, los siguientes cuatro, a $1/8$, y últimos ocho, a $1/16$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{16} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 3.$$

Siguiendo con el mismo argumento, podemos deducir que

$$S_{2^N} = \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{N \text{ veces}} = 1 + N \cdot \frac{1}{2},$$

que tiende a infinito cuando N tiende a infinito. Hemos probado que $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ no es acotada. $\square$

Series geométricas

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ se llama *serie geométrica* de razón r .

La siguiente proposición nos brinda una fórmula cerrada para la sucesión de sumas parciales de la serie geométrica.

Proposición (5.2.2): Si $r \neq 1$, la sucesión de sumas parciales de la serie geométrica está dada por

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

Demostración: Como $r \neq 1$, $1 - r \neq 0$ y, por lo tanto, podemos multiplicar y dividir por $1 - r$

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \left(\sum_{n=0}^{N-1} r^n \right) \cdot \frac{1 - r}{1 - r} = (1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1}) \cdot \frac{1 - r}{1 - r}.$$

Si distribuimos en el numerador, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} r^n &= \frac{1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} - r \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1})}{1 - r} \\ \sum_{n=0}^{N-1} r^n &= \frac{1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} - r - r^2 - r^3 - \dots - r^N}{1 - r}. \end{aligned}$$

Cancelando todos los términos opuestos, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

□

Observación: Para poder usar la fórmula anterior, debemos tener especial cuidado con que la suma comience con el término $n = 0$.

Como corolario podemos deducir para qué valores de r la serie geométrica resulta ser convergente o divergente.

Corolario (5.2.3): Si $-1 < r < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a

$\frac{1}{1 - r}$. Si $|r| \geq 1$, la serie resulta divergente.

Demostración: Es claro que si $r = 1$, el término general de la sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N \text{ veces}} = N.$$

Entonces la serie resulta divergente pues

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} 1^n = \infty.$$

Supongamos ahora que $r \neq 1$. Recordemos que la sucesión dada por $a_N = r^N$ con $r \neq 1$ converge únicamente si $-1 < r < 1$ y, además, en ese caso, $\lim_{N \rightarrow \infty} r^N = 0$. En los otros casos, esta sucesión oscila o tiende a infinito.

Luego, por la Proposición (5.2.2), si $-1 < r < 1$ tenemos que la serie es convergente y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - r^N}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Si $|r| \geq 1$, entonces $r \leq -1$ o $r \geq 1$, y por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge. □

Ejemplo 5.2.4: Geométricas

Calcular:

1. $\sum_{n=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

2. $\sum_{n=4}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Resolución:

1. Por la Proposición (5.2.2) tenemos que el resultado de la suma es

$$\sum_{n=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2047}{1024}.$$

2. En este ejercicio debemos calcular la suma desde $n = 4$ hasta $n = 10$, para hacerlo observemos que es lo mismo que sumar los términos hasta $n = 10$ y restar los términos hasta 3, es decir

$$\sum_{n=4}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Por el primer ítem sabemos que la primer suma es $\frac{2047}{1024}$, y del mismo modo, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{8}.$$

Luego podemos concluir que

$$\sum_{n=4}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2047}{1024} - \frac{15}{8} = \frac{127}{1024}.$$

Ejemplo 5.2.5: Geométricas

Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes. En caso de que sean convergentes indicar a qué valor convergen

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Resolución:

- a. El Corolario (5.2.3) nos afirma que la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ es convergente, y usando nuevamente la fórmula de la Proposición (5.2.2) tenemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

- b. En este ítem debemos calcular la suma de la serie geométrica de razón $1/2$ pero desde $n = 1$. Para esto usaremos lo calculado en el ítem anterior, sumando y restando el término correspondiente a $n = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1.$$

Series telescópicas

Una *serie telescópica* es una serie cuyo término general $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lo podemos escribir como resta de dos términos consecutivos de alguna sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Es decir, es una serie como la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Veamos dos ejemplos que ilustran lo que ocurre en general con este tipo de series.

Ejemplo 5.2.6: Telescópicas

Decidir si las siguientes series son convergentes o no, y en caso de serlo, calcular su suma (el límite de las sumas parciales):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$.

Resolución:

1. Usando fracciones simples, notemos que:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}.$$

Si hacemos las cuentas obtenemos que $A = 1$ y $B = -1$. Luego

podemos reescribir de modo que resulta ser una serie telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Observemos que la N -ésima suma parcial es:

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right).$$

Cancelando los términos opuestos obtenemos que $S_N = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}$ que converge a 1 cuando N tiende a infinito.

Concluimos que la serie es convergente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1.$$

2. Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$ es una serie telescópica, utilizando la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1))$$

Razonando como en el ítem anterior, la N ésima suma parcial es:

$$S_N = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(N) - \ln(N+1))$$

$$S_N = \ln(1) - \ln(N+1)$$

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N+1) = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$ es divergente.

La siguiente proposición generaliza lo hecho en los ejemplos anteriores.

Proposición sobre la convergencia de series telescópicas (5.2.7):

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ converge si y solo si la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y en ese caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Demostración: La N -ésima suma parcial es

$$\sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_N - b_{N+1}) = b_1 - b_{N+1}.$$

Vemos claramente que la serie resulta convergente si y solamente si la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Además, si tomamos límite cuando N tiende a infinito, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) = b_1 - \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N+1}.$$

□

Series p

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se llama *serie p* .

Veremos más adelante, utilizando el Criterio Integral de Cauchy (Proposición (5.4.5)), que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Ejercicios

Ejercicio 5.2.1: Calcular las siguientes sumas

a. $\sum_{n=0}^{20} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

c. $\sum_{k=80}^{160} \ln(k+1) - \ln(k).$

b. $\sum_{k=6}^{30} 4^k.$

d. $\sum_{n=0}^{89} (-1)^n 3^{-n}.$

Ejercicio 5.2.2: Decidir si las siguientes series son convergentes y en caso afirmativo indicar a que valor convergen.

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

c. $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k+1) - \ln(k).$

b. $\sum_{k=6}^{+\infty} 4^k.$

d. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^2 - 2n + 1}.$

Ejercicio 5.2.3: Una pelota es lanzada desde una altura de 100 m. Cada vez que toca el piso rebota a $2/3$ de su altura anterior. Hallar el largo total del recorrido de la pelota.

Ejercicio 5.2.4: Tres personas dividen una pizza en cuatro partes iguales y cada uno come un cuarto. Luego dividen el resto en cuatro partes iguales y cada uno come un cuarto y así sucesivamente. Mostrar que al final cada uno come un tercio de la pizza.

5.3 Propiedades de las series

Podemos deducir fácilmente del álgebra de límites para sucesiones las siguientes proposiciones, y nos serán muy útiles para decidir si una serie es convergente o no.

Proposición (5.3.1): Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

La proposición anterior nos afirma que la convergencia de una serie no depende de los primeros términos de la misma (sin importar cuántos): solo depende de la cola de la serie. Por este motivo tiene sentido la notación $\sum a_n$ cuando solo nos interese la convergencia o la divergencia de la serie de término general a_n .

Proposición sobre la linealidad (5.3.2): Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series convergentes, α y β son números reales, entonces la serie $\sum(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ es convergente y su suma viene dada por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.$$

Proposición (5.3.3): Si la serie $\sum a_n$ es convergente y la serie $\sum b_n$ es divergente y si α y β son dos números reales con $\beta \neq 0$, entonces la serie $\sum(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ resulta divergente.

Proposición (5.3.4): Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergen ambas a $+\infty$, entonces la serie $\sum(a_n + b_n)$ resulta divergente.

Estudiaremos a continuación una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de una serie.

Teorema (5.3.5): Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

Demostración: Como la serie es convergente llamemos

$$S = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^N a_n.$$

Si reescribimos el término general de la serie del siguiente modo,

$$a_N = \sum_{n=n_0}^N a_n - \sum_{n=n_0}^{N-1} a_n,$$

tomando límite concluimos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=n_0}^N a_n - \sum_{n=n_0}^{N-1} a_n \right) = S - S = 0.$$

□

Sutilezas lógicas: la recíproca y la contrarrecíproca. El teorema anterior tiene la estructura de una implicación: Si A entonces B . En nuestro caso A es la proposición “ $\sum a_n$ es convergente” y B es la proposición “la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero”. Recordemos que una implicación de este tipo es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca: Si no ocurre B , entonces no ocurre A .

El teorema anterior lo usaremos en muchos casos mediante su contrarrecíproco, que afirma que si la sucesión (a_n) no converge a cero, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 5.3.6: Serie no convergente

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no es convergente.

Resolución: Usando la contrarrecíproca del Teorema (5.3.5) concluimos que la serie no es convergente ya que su término general no tiende a cero. De hecho la sucesión de sumas parciales resulta ser la

siguiente sucesión divergente

$$S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } N \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } N \text{ es par} \end{cases}$$

Es un error muy común creer que vale la recíproca del teorema enunciado anteriormente: “Si B entonces A ”, o “si el término general de una serie tiende a cero entonces la serie tiene que ser convergente”. Es importante que notemos del teorema no podemos concluir la convergencia de una serie si su término general tiende a cero.

De hecho, hay casos que muestran que una serie puede converger o diverger cuando el término general tiende a cero. Por ejemplo, hemos visto que la serie $\sum \frac{1}{n^2+n}$ es convergente y la serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente y en ambos casos los términos generales de las series convergen a cero.

Estos ejemplos muestran que la recíproca del teorema es una afirmación falsa en general. De hecho, si vale una implicación (Si A entonces B) y también vale su recíproca (Si B entonces A) entonces tenemos una equivalencia lógica (Vale A si y solo si vale B) y esto no es verdad en el caso de las series. En otras palabras, no es cierto que una serie sea convergente si y solo si su término general tiende a cero.

Ejemplo 5.3.7: Convergencia

Decidir si las siguientes series son convergentes o no y en caso de ser posible decidir a qué valor convergen:

1. $\sum_{n=7}^{\infty} \left[\left(\frac{-1}{3} \right)^n + \left(\frac{2}{5} \right)^{n-3} \right]$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + \left(\frac{3}{2} \right)^n \right]$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \right]$.

Resolución:

1. Para decidir si la serie es convergente estudiaremos por separado

las series

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3}.$$

Notemos que ambas series son geométricas de razón $r = -1/3$ y $r = 2/5$ respectivamente y dado que en los dos casos $|r| < 1$, resultan convergentes.

Comencemos trabajando con la primera serie. Recordemos que para calcular el valor al que converge, según el Corolario (5.2.3) el índice de la suma debe comenzar con $n = 0$ mientras que en este ejemplo comienza con $n = 7$. Realizaremos un cambio de índice.

Consideramos la sustitución $i = n - 7$, luego $n = i + 7$. Observemos que $n = 7$ es equivalente a $i = 0$ y que $n \rightarrow \infty$ si y solo si $i \rightarrow \infty$. Entonces, vale la igualdad

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{i+7}.$$

Si usamos las propiedades de la potencia y el álgebra de límites para series, tenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{i+7} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^i \left(\frac{-1}{3}\right)^7 = \left(\frac{-1}{3}\right)^7 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^i.$$

Por el Corolario (5.2.3) la última suma es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^i = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})}.$$

Volviendo a la serie que queremos calcular, en este caso, concluimos:

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \left(\frac{-1}{3}\right)^7 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^i = \left(\frac{-1}{3}\right)^7 \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = -\frac{1}{2916}.$$

Para conocer el número al cual converge la segunda serie geométrica

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3}$$

trabajemos de la misma manera que con la serie anterior. Si realizamos el mismo cambio de índice $i = n - 7$, entonces obtenemos:

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{i+7-3} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{i+4} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^i$$

y usamos la linealidad y el Corolario (5.2.3),

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^i = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^i = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{16}{375}.$$

Finalmente podemos afirmar que el valor al cual converge la serie está dado por

$$\begin{aligned} \sum_{n=7}^{\infty} \left[\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} \right] &= \sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} = \\ &= -\frac{1}{2916} + \frac{16}{375} = \frac{-125 + 15552}{364500} = \frac{15427}{364500}. \end{aligned}$$

Podemos decir que

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left[\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} \right] = \frac{15427}{364500}.$$

2. Al igual que en el ítem anterior, para ver si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \right]$$

es convergente, estudiaremos por separado la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right).$$

Como la primera es una serie geométrica de razón $r = 1/2$, resulta convergente. Cambiando el índice por $i = n - 1$, de modo que la

serie comience en 0, resulta que $n = i + 1$ y valen, como hemos visto, las igualdades siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Usamos la linealidad y el Corolario (5.2.3),

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Para trabajar con la segunda serie, notemos que podemos reescribirla del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right)$$

Por lo tanto, es suma de las siguientes dos series telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right).$$

La N ésima suma parcial de la primera serie telescópica es

$$\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{2}{N-1} - \frac{2}{N}\right) + \left(\frac{2}{N} - \frac{2}{N+1}\right) = 2 - \frac{2}{N+1}.$$

Si tomamos límite cuando N tiende a infinito vale que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{N+1} = 2.$$

Si trabajamos de manera análoga con la segunda serie telescópica, valen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) + \dots + \left(\frac{2}{N+1} - \frac{2}{N+2} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{N+2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto por el álgebra de límites, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \right) = 2 + 1 = 3.$$

Podemos concluir que la serie del enunciado converge y cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \right] = 1 + 3 = 4.$$

3. En este punto debemos estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + \left(\frac{3}{2} \right)^n \right].$$

Notemos que tiene como término general la suma de las sucesiones $(3/4)^n$ y $(3/2)^n$. Luego, consideremos las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

La primera es convergente pues es una serie geométrica de razón $3/4$, de módulo menor que 1. En cambio, la segunda es divergente pues es una serie geométrica de razón $3/2$, de módulo mayor que 1. Por la Proposición (5.3.3), concluimos que la serie es divergente.

Ejemplo 5.3.8: Sumas

Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que cumplen que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a-1}{4} \right)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \right] = 2.$$

Resolución: Comencemos realizando el cambio de índice $i = n - 2$ de modo tal que la serie comience con el término $i = 0$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{a-1}{4} \right)^{i+2} - \frac{1}{2^{i+3}} \right] = 2.$$

Observemos que la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+3}}$$

es una serie geométrica de razón $1/2$, por lo tanto es convergente y suma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+3}} = \frac{1}{2^3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{4}.$$

Podemos deducir entonces que también es convergente la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{4}\right)^{i+2}$$

y valen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{a-1}{4}\right)^{i+2} - \frac{1}{2^{i+3}} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{4}\right)^{i+2} - \frac{1}{4}$$

$$2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{4}\right)^{i+2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{a-1}{4}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{4}\right)^i$$

Para que la serie del último miembro sea convergente, a debe cumplir:

$$\left| \frac{a-1}{4} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{a-1}{4} < 1$$

$$-4 < a-1 < 4$$

$$-3 < a < 5$$

y en ese caso, son verdaderas las igualdades que siguen:

$$\left(\frac{a-1}{4}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{4}\right)^i = \left(\frac{a-1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-1}{4}}$$

$$\begin{aligned}\frac{9}{4} &= \frac{(a-1)^2}{16} \cdot \frac{1}{\frac{5-a}{4}} \\ \frac{9}{4} &= \frac{(a-1)^2}{4} \cdot \frac{1}{5-a} \\ 9(5-a) &= a^2 - 2a + 1 \\ 0 &= a^2 + 7a - 44.\end{aligned}$$

Luego $a = 4$ ó $a = -11$, pero recordemos que $-3 < a < 5$. Por lo tanto la única solución posible es $a = 4$.

Ejercicios

Ejercicio 5.3.1: En cada caso calcular la suma parcial S_n . Determinar si la serie converge o diverge y, si converge, calcular la suma

a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}.$

e. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{5^{k-1}}.$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$

f. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{2k} + 4^{k+1} \left(\frac{-1}{3}\right)^{3k+2} \right].$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-1}{4}\right)^k + 2 \left(\frac{1}{5}\right)^k \right].$

g. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$

d. $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi} \right)^{k-1}.$

h. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{(k+1)^2} - \frac{3}{k^2} \right).$

Ejercicio 5.3.2: Calcular

a. $\sum_{k=0}^{\infty} r(1-r)^k, \quad 0 < r < 2.$

b. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad -1 < x < 1.$

Sugerencia: Empezar tomando un valor para r en a. y un valor para x en b. y luego tratar generalizar el resultado obtenido.

Ejercicio 5.3.3: Mostrar que

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$ diverge.

b. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = -\ln 2.$

Ejercicio 5.3.4: Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2+a)^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{12}.$

5.4 Criterios de convergencia por comparación

Definición: Diremos que una serie $\sum a_n$ es de *términos no negativos* si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$.

Observación: Si $\sum a_n$ es una serie de términos no negativos entonces la sucesión de sumas parciales es monótona creciente, pues

$$\sum_{n=n_0}^{N+1} a_n = \sum_{n=n_0}^N a_n + a_{N+1} \geq \sum_{n=n_0}^N a_n \text{ para todo } N \geq n_0.$$

Como consecuencia podemos deducir, usando la Proposición sobre sucesiones monótonas (1.2.4) del Apéndice, que las series de términos no negativos convergen si y solo si sus sumas parciales están acotadas. Además, si divergen, lo hacen a más infinito.

Los criterios que se enunciarán en esta sección serán criterios de convergencia para series de términos no negativos. Aún cuando la serie resultara convergente los criterios no servirán para dar el valor al cual converge.

Criterio de comparación directa

Criterio de comparación directa (5.4.1): Sean las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ que cumplen que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$ entonces

1. si $\sum b_n$ converge, se tiene que $\sum a_n$ también converge.
2. si $\sum a_n$ diverge, la serie $\sum b_n$ también diverge.

Demostración: Notemos que, por la observación anterior, las sucesiones de sumas parciales de ambas series son monótonas crecientes.

Luego para demostrar la primera afirmación basta con observar que

$$\sum_{n=n_0}^N a_n \leq \sum_{n=n_0}^N b_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.$$

Luego por la Proposición sobre sucesiones monótonas (1.2.4) del Apéndice, $\sum a_n$ resulta convergente.

Para la segunda proposición podemos usar la misma proposición. Como $\sum b_n$ es monótona creciente y no es acotada, por estar acotada inferiormente por una sucesión que diverge a más infinito, concluimos que $\sum b_n$ es divergente. $\square$

Ejemplo 5.4.2: Criterio de comparación directa

Decidir si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente o divergente.

Resolución: Veamos que la serie es convergente. Para eso veamos que el término general de la serie, $1/n^2$, es menor igual que otro término general para el cual la serie es convergente.

Como $n^2 \geq n^2 - n$ para todo $n \geq 2$, invirtiendo obtenemos que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2 - n} \text{ si } n \geq 2.$$

Veamos que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

es convergente.

Observemos primero que por fracciones simples podemos escribir

$$\frac{1}{n^2 - n} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n - 1}$$

y la serie resulta ser telescópica, y la N ésima suma parcial es:

$$S_N = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1}\right) = 1 - \frac{1}{N}$$

que tiende a 1 cuando N tiende a infinito.

Luego la serie es convergente y como su término general es mayor o igual a $1/n^2$, por el criterio de comparación directa podemos concluir que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente.

Como los primeros términos de la serie no cambian la convergencia o no de la misma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

resulta también convergente.

Criterio de comparación por paso al límite

Criterio de comparación por paso al límite (5.4.3): Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos no negativos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

vale que

1. si $0 \leq L < +\infty$ y si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ es convergente.
2. si $0 < L < +\infty$ o si $L = +\infty$ y si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Observemos que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ es un número real positivo, las series de términos no negativos $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se comportan de la misma manera, es decir, o ambas convergen o ambas divergen.

Demostración:

1. Consideremos R un número mayor que L . Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ podemos afirmar que existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ vale la siguiente desigualdad:

$$\frac{a_n}{b_n} \leq R.$$

Como $b_n > 0$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$a_n \leq R \cdot b_n.$$

Aplicamos el Criterio de Comparación Directa (5.4.1), podemos concluir que, al ser $\sum b_n$ convergente, $\sum a_n$ también lo es.

2. En este caso trabajaremos de manera similar al anterior. Como $L > 0$ ó $L = +\infty$, si $0 < R < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ son verdaderas las desigualdades:

$$\frac{a_n}{b_n} \geq R$$

$$a_n \geq R \cdot b_n.$$

Por el Criterio de Comparación Directa (5.4.1), como $\sum b_n$ es divergente, resulta que $\sum a_n$ es divergente.

□

Ejemplo 5.4.4: Comparación por paso al límite

Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$

Resolución:

1. Comparemos $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ con la serie armónica que como vimos en la Proposición (5.2.1), es divergente. Como el límite del cociente entre los términos generales de ambas series es un número real positivo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

por el Criterio de comparación por paso al límite (5.4.3), ambas

series se comportan igual y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

es divergente.

2. Comparamos nuevamente con la serie con la armónica. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

por el Criterio de comparación por paso al límite (5.4.3), ambas series se comportan igual y por lo tanto $\sum \operatorname{sen}(1/n)$ es divergente.

3. Para decidir si $\sum \frac{1}{n^2(n+1)}$ es convergente, comparemos con la serie p con $p = 3$: $\sum \frac{1}{n^3}$, que es convergente.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2(n+1)}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1 > 0,$$

ambas series tienen el mismo comportamiento y, por lo tanto, $\sum \frac{1}{n^2(n+1)}$ es convergente.

Criterio integral de Cauchy

El siguiente criterio nos permite utilizar herramientas del continuo (integrales sobre la recta real) aplicadas al estudio de lo discreto (las series).

Criterio integral de Cauchy (5.4.5): Si se tiene la sucesión $a_n = f(n)$ donde la función $f : [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es decreciente, entonces las sucesiones cuyos términos generales son

$$\sum_{n=n_0}^N a_n \text{ y } \int_{n_0}^N f(x) dx$$

resultan ambas convergentes o ambas divergentes.

Es decir la serie converge si y solo si la integral impropia correspondiente converge.

Demostración: Comencemos observando que como la función f es decreciente, si $n \leq x \leq n+1$ entonces $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ para todo número natural $n \geq n_0$. Luego, por la monotonía de la integral, ver (1.1.4), tenemos que

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Si sumamos desde $n = n_0$ hasta $n = N-1$ obtenemos:

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} f(n+1) \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n)$$

$$\sum_{n=n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n).$$

En la Figura (5.2) podemos observar estas desigualdades.

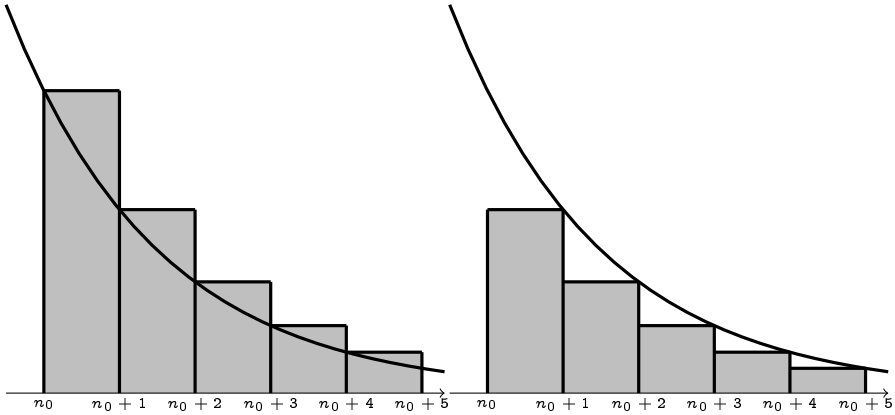


Figura 5.2: Criterio Integral de Cauchy.

Observemos que, como $f(x) > 0$, las sucesiones $\int_{n_0}^N f(x) dx$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ son monótonas crecientes.

Luego podemos deducir que si $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ es convergente, entonces, observando la desigualdad del lado derecho, $\int_{n_0}^N f(x) dx$ está acotada superiormente y como además es monótona, resulta ser convergente. Si en cambio

$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ es divergente, observando la desigualdad de la izquierda, resulta que $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ es divergente.

De manera análoga concluimos que si la integral impropia converge entonces la serie converge y que si la integral diverge, la serie diverge.

□

Ejemplo 5.4.6: Serie p

Demostrar que la serie p , $\sum \frac{1}{n^p}$, es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Resolución: Para demostrar lo pedido utilizamos el criterio integral de Cauchy.

Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ que tiene como primitiva a

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}, & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(x), & \text{si } p = 1 \end{cases}.$$

Separamos el problema en casos. Si $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p}$$

y por lo tanto, por el Criterio Integral de Cauchy (5.4.5), como la integral impropia converge, la serie converge.

Si $p < 1$,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty$$

y por el criterio integral de Cauchy (5.4.5), la serie diverge.

Nos queda estudiar el caso $p = 1$,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln(M) - \ln(1) = +\infty.$$

Luego en este caso la serie también diverge y se concluye el ejercicio.

Ejemplo 5.4.7: Convergencia

Analizar la convergencia de las siguientes series:

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Resolución:

1. Es un buen ejercicio primero verificar si el término general tiende a 0, en este caso es notorio que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

Luego con esta información no podemos afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

Para decidir si la serie es convergente apliquemos el criterio de comparación directa. Comparemos con la serie armónica, pues probaremos que para todo $x \geq 2$ vale la desigualdad

$$\ln(x) \leq x$$

o equivalentemente

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}.$$

Luego, como la serie armónica es divergente, también lo es $\sum \frac{1}{\ln(x)}$.

Por lo tanto, solamente nos falta verificar que si $x \geq 2$ entonces $\ln(x) \leq x$. Con este fin, consideramos la función $f(x) = \ln(x) - x$ y veamos que $f(x) \leq 0$ si $x \geq 2$.

Como $f'(x) = 1/x - 1 < 0$ para todo $x > 2$, f es decreciente. Además el valor máximo alcanzado por f es $f(2) = \ln(2) - 2 < 0$. Podemos concluir que para todo $x \geq 2$

$$f(x) = \ln(x) - x \leq f(2) < 0.$$

Entonces $\ln(x) < x$ para todo $x \leq 2$, que era lo que queríamos probar.

2. Notemos primero que el término general de la serie $\sum \frac{n}{e^n}$ converge a 0. En este caso, para decidir si la serie resulta convergente, usamos el Criterio Integral de Cauchy (5.4.5) considerando la función $f(x) = x/e^x$. Es claro que $f(n) = n/e^n$ es el término general de la serie y que $f(x) \geq 0$. Además, como la derivada de f cumple:

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} < 0 \text{ si } x > 1,$$

concluimos que $f(x)$ es decreciente. Por lo tanto f verifica las hipótesis del criterio y podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

converge si y solo si

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$$

converge.

Analicemos la convergencia de la integral impropia. Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, la integral impropia es de primer especie, luego debemos calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x e^{-x} dx.$$

Aplicando el método de integración por partes tenemos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-x e^{-x} \Big|_1^N + \int_1^N e^{-x} dx \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-xe^{-x} \Big|_1^N - e^{-x} \Big|_1^N \right] = \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-\frac{N}{e^N} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^N} + \frac{1}{e} \right] = \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Luego concluimos que como la integral impropia converge, la serie es convergente.

3. Para decidir si $\sum n \operatorname{tg} (1/n^2)$ es convergente, observemos primero que es una serie de términos no negativos y veamos que cumple la condición necesaria de convergencia.

Calculamos el límite de su término general:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)},$$

para calcular este límite recordemos que $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a)}{a} = 1$, luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)} = 0.$$

Una observación importante es que cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} \sim 1 \text{ y } \frac{1}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)} \sim 1.$$

Luego el término general de la serie se comporta como $1/n$ cuando $n \rightarrow +\infty$, lo que nos da el pie para usar el Criterio de Comparación por Paso al Límite (5.4.3), comparando con la serie armónica, que sabemos que es divergente.

Calculamos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n^2} \right)} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0.$$

Entonces por el Criterio de Comparación por Paso al Límite (5.4.3) concluimos que la serie es divergente.

4. Como en los ejemplos anteriores, para decidir si $\sum (1 + 1/n)^n$ es convergente, comencemos estudiando si la serie cumple con la condición necesaria.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Como el término general no converge a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces no se cumple la condición necesaria de convergencia y por lo tanto la serie diverge.

Ejercicios

Ejercicio 5.4.1: Utilizando el Criterio Integral decidir si convergen o divergen las siguientes series:

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$. b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$. c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$.

Ejercicio 5.4.2: Utilizando el Criterio de Comparación decidir si convergen o divergen las siguientes series:

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$. c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2 + 2^n}$. e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n + 1}{4n^4 - n + 1}$.
b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$. d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{6^n}$. f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 \sin^2(e^n)}{n^6 + 3n}$.

Ejercicio 5.4.3: Estudiar la convergencia de las siguientes series utilizando el Criterio de Comparación por paso al Límite:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3 + n + 2}$. d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^5}{3n^{10} + n}}$. e. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \sin\left(\frac{1}{n^2 + n - 2}\right)$.
c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{81n} + \sqrt[4]{n}}{20n - 19}$. f. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$.

Ejercicio 5.4.4: Hallar todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ de modo que cumplan que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^p + n}{\sqrt{n^5 + 5}}$ converja.

5.5 Series alternadas

Definición: Una serie la llamamos *alternada* si el término general es alternadamente positivo y negativo. Podemos escribirla de la siguiente manera

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

donde $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

Criterio de Leibniz

Veremos un criterio que nos asegura, bajo ciertas hipótesis, la convergencia de una serie alternada. Además, en ese caso, nos brinda una cota para el error que se comete aproximando el límite con las sumas parciales.

Criterio de Leibniz (5.5.1): Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente que converge a cero, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

Más aún, si notamos con $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ a su suma y con $S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n$ a la N -ésima suma parcial, tenemos que

$$0 \leq (-1)^N \cdot (S_N - S) \leq a_{N+1}$$

para todo $N \geq n_0$. Luego $|S_N - S| < a_{N+1}$.

Es decir, el error que se comete al aproximar la suma de la serie por la N -ésima suma parcial es menor que el término a_{N+1} .

Demostración: Veamos primero que las sucesiones $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ (sumas hasta números pares) es monótona decreciente y acotada inferiormente, y que $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ (sumas hasta números impares) es monótona creciente y acotada superiormente.

Para mostrar que $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ es decreciente, escribimos

$$S_{2(N+1)} = S_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \leq S_{2N}$$

pues, como la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, $-a_{2N+1} + a_{2N+2} \leq 0$.

Notemos que, asociando los términos de la siguiente manera, podemos ver que la sucesión $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente:

$$S_{2N} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2N-2} - a_{2N-1}) + a_{2N} \geq -a_1$$

ya que, $a_{2n-2} - a_{2n-1} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_{2N} \geq 0$.

De manera análoga, $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ es creciente:

$$S_{2N+1} = S_{2N-1} + a_{2N} - a_{2N+1} \geq S_{2N+1}$$

y está acotada superiormente:

$$S_{2N+1} = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \dots + (-a_{2N-1} + a_{2N}) - a_{2N+1} \leq 0.$$

Por la Proposición sobre sucesiones monótonas, ver (1.2.4) del Apéndice, tanto $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ como $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ son convergentes.

Veamos que además tienen el mismo límite, y este será el valor al cual converge la serie, ver (1.2.5) del Apéndice. Observemos que $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1}$ y notemos con

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N}.$$

Como la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_{2N} + a_{2N+1}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} + \lim_{N \rightarrow +\infty} a_{2N+1} = S.$$

Nos falta encontrar la cota para el error producido al aproximar S por S_N . Como $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ es creciente, para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple las siguiente desigualdades:

$$S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}.$$

Por un lado,

$$0 \geq S - S_{2N} \geq S_{2N+1} - S_{2N} = -a_{2N+1}.$$

Luego, multiplicando por $(-1)^{2N+1} = -1$, obtenemos:

$$0 \leq (-1)^{2N+1}(S - S_{2N}) \leq a_{2N+1}.$$

Por otro lado,

$$0 \leq S - S_{2N-1} \leq S_{2N} - S_{2N-1} = a_{2N}$$

Como $(-1)^{2N} = 1$, tenemos que

$$0 \leq (-1)^{2N}(S - S_{2N-1}) \leq a_{2N}.$$

Concluimos que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$0 \leq (-1)^{N+1}(S - S_N) \leq a_{N+1}.$$

□

Ejemplo 5.5.2: Criterio de Leibniz

Decidir si las siguientes series convergen y, en caso afirmativo, aproximar el valor al cual convergen con la suma parcial S_5 y dar una cota para el error cometido al realizar dicha aproximación:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}.$$

Resolución:

1. Notemos que la sucesión dada por $a_n = 1/n$ es de términos no negativos y su término general tiende a cero. Además resulta decreciente para todo $n \geq 1$ pues:

$$n+1 > n$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, por el criterio de Leibniz (5.5.1), la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente.

Además, si escribimos

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ y } a_n = \frac{1}{n},$$

el criterio afirma que vale la desigualdad

$$|S_N - S| \leq a_{N+1}.$$

Debemos dar una cota para el error $|S_5 - S|$ que es el que se comete al aproximar S con S_5 . Observemos que la suma parcial hasta 5 es

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^5}{5} \\ S_5 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = -\frac{47}{60}. \end{aligned}$$

Luego

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sim -\frac{47}{60}.$$

Por el criterio de series alternadas vale que

$$|S_5 - S| \leq \frac{1}{6},$$

entonces el error que cometemos al realizar la aproximación es como mucho $1/6$.

2. Tenemos que estudiar la convergencia de la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}.$$

Notemos que el término general de la serie es

$$a_n = \frac{\ln(n)}{n} \geq 0.$$

Para ver que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y tiende a cero en el infinito, estudiaremos la función

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Calculemos el límite al infinito de f , usando la regla de L'Hôpital, ver (1.6.1) del Apéndice, para la indeterminación " $\frac{\infty}{\infty}$ ":

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Podemos concluir entonces que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Como

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0 \text{ si } x > e,$$

entonces f es decreciente en el intervalo $(e, +\infty)$. Por lo tanto $f(n) = \ln(n)/n = a_n$ es decreciente para todo $n \geq 3$.

Hemos probado que se verifican todas las hipótesis del criterio de Leibniz (5.5.1) y, por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

es convergente.

La suma parcial S_5 es

$$S_5 = \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = -\frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(5)}{5}.$$

Luego tenemos que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} \sim \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(5)}{5} \sim 0,005055502.$$

El error que cometemos al realizar dicha aproximación cumple:

$$|S_5 - S| \leq a_6$$

$$|S_5 - S| \leq \frac{\ln(6)}{6}.$$

Es decir, el error cometido al aproximar S por S_5 es menor o igual a $\ln(6)/6$.

Ejercicios

Ejercicio 5.5.1: Mostrar que las siguientes series alternadas convergen. Estimar el error que se comete al usar la suma parcial S_4 para aproximar el valor S de la serie.

- a. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{3k+1}$. c. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k}$. e. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{k}\right)^k$.
- b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)}$. d. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$.

5.6 Convergencia absoluta y convergencia condicional

Definición: Una serie $\sum a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum |a_n|$ converge.

Si una serie es convergente pero no converge absolutamente decimos que la serie converge condicionalmente.

Teorema (5.6.1): La convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Es decir que si $\sum |a_n|$ converge, entonces también converge $\sum a_n$.

Demostración: Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ entonces

$$0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|.$$

Luego la serie $\sum (|a_n| + a_n)$ es de términos no negativos y su término general está acotado por $2|a_n|$.

Por hipótesis, la serie $\sum 2|a_n|$ es convergente, entonces por el criterio de comparación directa (5.4.1), la serie $\sum (|a_n| + a_n)$ es convergente y finalmente, por linealidad y por la convergencia de $\sum |a_n|$, deducimos que $\sum a_n$ es convergente.

□

Observación: Hemos visto que la serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente, pues la serie armónica $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ es divergente.

Ejemplo 5.6.2: Convergencia condicional y absoluta

Decidir si las siguientes series convergen absoluta o condicionalmente:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^{3/2}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^3}{4n^7 + n}.$

Resolución:

1. Primero veamos si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge absolutamente, es decir si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

es convergente.

Como esta última resulta ser una serie p con $p = 1/2$, es divergente. Luego la serie original no converge absolutamente.

Para probar que sí converge condicionalmente apliquemos el criterio de Leibniz (5.5.1).

Si tomamos $a_n = 1/\sqrt{n}$, la serie $\sum (-1)^n \cdot a_n$ resulta alternada. Además, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es positiva y converge a 0 cuando n tiende a infinito.

Como resultan equivalente las desigualdades

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$n+1 > n$$

deducimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

Por lo tanto, por el criterio de Leibniz (5.5.1), la serie es convergente. Luego, como no es absolutamente convergente, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente.

2. Debemos estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{(-n)^3}{4n^7+n}$. Comenzamos estudiando la convergencia absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-n)^3}{4n^7+n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|-n|^3}{|4n^7+n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4n^7+n}.$$

Notemos que el término general converge a 0:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{4n^7+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^7(4 + \frac{1}{n^6})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4 + \frac{1}{n^6}} = 0.$$

Además podemos observar que si $n \rightarrow +\infty$, entonces

$$\frac{n^3}{4n^7+n} = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4 + \frac{1}{n^6}} \sim \frac{1}{4n^4}.$$

Es decir, que la cola de la serie se comporta como $\sum \frac{1}{n^4}$. Luego si tomamos límite cuando n tiende a infinito, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{4n^7+n}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7}{4n^7+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7}{n^7(4 + \frac{1}{n^6})} = \frac{1}{4} > 0.$$

Como $\sum \frac{1}{n^4}$ converge por ser serie $p = 4$, por el Criterio de Comparación por paso al límite (5.4.3) podemos afirmar que $\sum \frac{n^3}{4n^7+n}$ es convergente. Lo que implica que la serie $\sum \frac{(-n)^3}{4n^7+n}$ converge absolutamente.

3. Para responder a lo pedido en el enunciado, estudiemos la convergencia absoluta de la serie $\sum \frac{\text{sen}(n)}{n^{3/2}}$. Es decir, analizamos la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(n)}{n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n)|}{n^{3/2}}.$$

Recordemos que $|\text{sen}(x)| \leq 1$, entonces

$$0 \leq \frac{|\text{sen}(n)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Como $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente por ser una serie $p = 3/2$, por el Criterio de Comparación Directa (5.4.1), afirmamos que $\sum \left| \frac{\text{sen}(n)}{n^{3/2}} \right|$ converge. Por lo tanto, concluimos que la serie $\sum \frac{\text{sen}(n)}{n^{3/2}}$ converge absolutamente.

Criterio de Cauchy

Criterio de Cauchy (5.6.3): Si la serie $\sum a_n$ cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, luego resulta que

1. si $L < 1$, entonces $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. si $L > 1$ ó $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

En cualquier otro caso el criterio no sirve para decidir la convergencia de la serie.

Demostración: Suponemos primero que $L < 1$. Para demostrar la convergencia de la serie $\sum |a_n|$ la acotaremos superiormente por una serie convergente. Tomemos un número real R que cumple $L < R < 1$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ valen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &< R \\ |a_n| &< R^n. \end{aligned}$$

Como $\sum R^n$ es una convergente por ser una serie geométrica cuya razón cumple $|R| < 1$, por el Criterio de Comparación Directa (5.4.1) la serie $\sum |a_n|$ converge y por lo tanto $\sum a_n$ converge absolutamente.

Para el caso $L > 1$ ó $L = +\infty$, vemos que no se cumple la condición necesaria para la convergencia de una serie, Teorema (5.3.5), es decir que el término general a_n no converge a 0.

Si R es un número real que cumple $1 < R < L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se cumplen

$$\sqrt[n]{|a_n|} > R$$

$$|a_n| > R^n.$$

Luego, si tomamos límite, como $R > 1$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} R^n = +\infty.$$

Esto nos muestra que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión divergente, y luego no converge a 0. Concluimos que $\sum a_n$ es divergente. $\square$

Ejemplo 5.6.4: Cauchy

Usando el criterio de Cauchy decidir si las siguientes series son o no convergentes

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^5 - 3n^2 + 1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n} \right)^{3n+1}.$$

Resolución:

1. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1$, el Criterio de Cauchy (5.6.3) afirma que la serie converge absolutamente. Por lo tanto, por el Teorema (5.6.1) la serie $\sum \frac{1}{\ln^n(n)}$ es convergente.

2. Para analizar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

y nuevamente, por el Criterio de Cauchy (5.6.3), $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ resulta convergente absolutamente. Luego, por el Teorema (5.6.1), la serie $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

3. Debemos decidir si la serie $\sum \frac{(-2)^n}{n^5 - 3n^2 + 1}$ converge. Observemos que si n es grande, vale la igualdad siguiente:

$$\left| \frac{(-2)^n}{n^5 - 3n^2 + 1} \right| = \frac{2^n}{n^5 - 3n^2 + 1}.$$

Por lo tanto, el límite que debemos calcular es:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^5 - 3n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^5(1 - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5})}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^5} \sqrt[n]{1 - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5}}} = 2 > 1. \end{aligned}$$

Luego, el Criterio de Cauchy (5.6.3) afirma que la serie $\sum \frac{(-2)^n}{n^5 - 3n^2 + 1}$ es divergente.

4. Para conocer la convergencia de la serie $\sum \left(-\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n}\right)^{3n+1}$ calculamos el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(-\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n}\right)^{3n+1} \right|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| -\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n} \right|^{3n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n} \right|^{\frac{3n+1}{n}}. \end{aligned}$$

Recordemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, luego el límite de la base es

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{n^3(3 + \frac{2}{n^2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt[n]{n} + \frac{4}{3 + \frac{2}{n^2}} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite que debemos calcular para usar el criterio cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\sqrt[n]{n} + \frac{4n^3}{3n^3 + 2n} \right|^{3 + \frac{1}{n}} = \left| \frac{1}{3} \right|^3 = \frac{1}{27} < 1.$$

Por el Criterio de Cauchy (5.6.3), la serie resulta converger absolutamente. Entonces, por el Teorema (5.6.1), la serie es convergente.

Criterio de D'Alembert

Criterio de D'Alembert (5.6.5): Si la serie $\sum a_n$ cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, luego resulta que

1. si $L < 1$, entonces $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. si $L > 1$ o $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

En cualquier otro caso el criterio no sirve para decidir la convergencia de la serie.

Demostración: La idea de la demostración del Criterio de D'Alembert es similar a la del Criterio de Cauchy. Suponemos primero que $L < 1$. Tomamos un número real R que cumple $L < R < 1$, luego existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ valen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &< R \\ |a_{n+1}| &< R|a_n| \end{aligned}$$

Del mismo modo, si $n - 1 \geq n_0$ tenemos

$$|a_n| < R|a_{n-1}|.$$

Siguiendo con el mismo razonamiento, son verdaderas las siguientes desigualdades

$$|a_n| < R|a_{n-1}| < R^2|a_{n-2}| < \dots < R^{n-n_0}|a_{n_0}|.$$

Como $\sum R^{n-n_0}|a_{n_0}| = R^{-n_0}|a_{n_0}| \sum R^n$ es convergente por ser una serie geométrica cuya razón cumple $|R| < 1$, afirmamos que, por el Criterio de Comparación Directa (5.4.1), $\sum |a_n|$ es convergente y por lo tanto $\sum a_n$ converge absolutamente.

Si $L > 1$, vemos que el término general de la serie no converge a 0. Si tomamos un número real R que cumple $1 < R < L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ vale

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > R$$

Como vimos en el caso anterior, si $n - 1 \geq n_0$ tenemos que

$$|a_n| > |a_{n-1}|R > \dots > R^{n-n_0}|a_{n_0}|.$$

Tomamos límite cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| > \lim_{n \rightarrow +\infty} R^{n-n_0}|a_{n_0}| = +\infty.$$

Luego a_n es divergente y por lo tanto la serie $\sum a_n$ diverge.

□

Ejemplo 5.6.6: D'Alembert

Utilizando el criterio de D'Alembert decidir la convergencia de las series

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n}.$$

Resolución:

1. Debemos calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Por el Criterio de D'Alembert (5.6.5) la serie resulta convergente absolutamente y, por el Teorema (5.6.1), la serie converge.

2. En este caso calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3(n+1))!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(3n)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(3n)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = +\infty.$$

Entonces, por el Criterio de D'Alembert (5.6.5), la serie resulta divergente.

El siguiente teorema relaciona los límites del cociente de D'Alembert y el de la raíz n -ésima de una sucesión.

Teorema (5.6.7): Si $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Podemos deducir, por el teorema anterior, que si en un ejemplo el criterio de D'Alembert no sirve para decidir la convergencia de una serie, tampoco servirá el de Cauchy.

Ejercicios

Ejercicio 5.6.1: Aplicando los Criterios de Cauchy o de D'Alembert, decidir si convergen las series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{n^{n+1}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4n^3 + 6n}{2n^6 + n^2}\right)^{10n^4}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n^4 + n^3 + 7} - \frac{2}{5}\right)^{2n}$

Ejercicio 5.6.2: Determinar en cada caso si la serie converge o diverge utilizando alguno de los métodos de decisión.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

g. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{(2j)!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n} + 1}{n^2}$

h. $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln i}\right)^i$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$

i. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4^j + j}{j!}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+200}$

j. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\right)^i$

e. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{100}}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n^5 + 3n) \sin\left(\frac{1}{n^5}\right)$

f. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2 + \sin^2(j)}$

Ejercicio 5.6.3: Determinar si convergen o divergen las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, decidir si la convergencia es absoluta o condicional.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+6)}{32n^4}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5n^3 - 65}{7n^3 - n}\right)^n$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2n+15}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-3} n!}{n^n}$

5.7 Series de funciones

Definición: Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos considerar, para cada x en el dominio de todas las f_n , la *serie de funciones*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Nos interesará conocer los valores de x para los cuales la serie de funciones resulte convergente.

Ejemplo 5.7.1: Convergencia

Dar los valores de x para los cuales las siguientes series de funciones resultan convergentes:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}. \qquad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(x+1)^n}.$$

Resolución:

1. Observemos primero que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right| = \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser una serie $p = 2$, por el Criterio de Comparación directa (5.4.1) resulta que $\sum \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right|$ es convergente para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\sum \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Debemos encontrar los valores de x para los cuales $\sum \frac{n^4}{(x+1)^n}$ es convergente. Notemos en primer lugar que $x \neq -1$. Utilizaremos el Criterio de Cauchy (5.6.3) para hallar los valores de x que cumplan lo pedido, para ello calculemos el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^4}{(x+1)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{|x+1|^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{|x+1|} = \frac{1}{|x+1|}.$$

Por el Criterio de Cauchy (5.6.3), sabemos que la serie converge absolutamente si

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x+1|} &< 1 \\ 1 &< |x+1| \\ x+1 &< -1 \quad \text{ó} \quad x+1 > 1 \\ x &< -2 \quad \text{ó} \quad x > 0.\end{aligned}$$

Además el criterio afirma que la serie es divergente si

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x+1|} &> 1 \\ 1 &> |x+1| \\ -1 &< x+1 < 1 \\ -2 &< x < 0.\end{aligned}$$

Luego nos resta ver qué ocurre con la serie en los casos $x = -2$ y $x = 0$.

Si $x = 0$ tenemos que la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(0+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4$$

cuyo término general no cumple la condición necesaria para que resulte convergente, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 = +\infty \neq 0.$$

Luego la serie diverge para $x = 0$.

Si $x = -2$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(-2+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^4$$

tampoco cumple la condición necesaria, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n n^4| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 = +\infty \neq 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^4 \neq 0.$$

Entonces la serie es divergente para $x = -2$.

Podemos concluir que la serie de funciones converge absolutamente (por lo tanto converge) si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y diverge si $x \in [-2, 0]$.

Series de potencias

En nuestro curso nos interesa especialmente estudiar un tipo de series de funciones: las series de potencias.

Definición: Una *serie de potencias* es una serie de la forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

donde $(a_n)_{n \geq n_0}$ es una sucesión dada y a un número fijo.

Llamamos *intervalo de convergencia* al intervalo centrado en a en el cual la serie de potencias converge absolutamente en el interior y diverge en el exterior, pudiendo converger o no en los extremos del intervalo. Es decir, converge absolutamente en un intervalo $(a - r, a + r)$ y diverge en $(-\infty, a - r) \cup (a + r, +\infty)$.

Con esta notación, llamamos r al *radio de convergencia*, donde r puede ser un número real no negativo o puede ser infinito en el caso de que la serie de potencias converja para todo número real.

Ejemplo 5.7.2: Intervalo de convergencia

Determinar los valores de x para los cuales las siguientes series de potencia convergen, indicando si la convergencia es absoluta o condicional. En cada caso dar el radio de convergencia.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} (x + 1)^n.$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-x)n^3}{2n^3+2} \right)^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+2)6^n} (2x-4)^n.$$

Resolución:

1. Usemos el Criterio de D'Alembert (5.6.5) para conocer los valores de $x \neq 0$ para los cuales la serie converge absolutamente. Calculamos el límite del cociente de D'Alembert para $x \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0.$$

Luego, el Criterio de D'Alembert (5.6.5) nos asegura que la serie converge absolutamente en toda la recta real. Cabe destacar que el radio de convergencia en este caso es $r = \infty$.

2. En este ejemplo aplicamos el Criterio de Cauchy (5.6.3). Calculamos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n}{n^2} (x+1)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} |x+1| = 3|x+1|.$$

Concluimos que la serie converge absolutamente si $x \in \mathbb{R}$ cumple

$$|x+1| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

y diverge si cumple

$$|x+1| > \frac{1}{3}.$$

$$x > -\frac{2}{3} \text{ ó } x < -\frac{4}{3}.$$

Luego el radio de convergencia es $r = 1/3$ y la serie converge absolutamente en $(-4/3, -2/3)$ y diverge en $(-\infty, -4/3) \cup (-2/3, +\infty)$.

Para los casos $x = -2/3$ y $x = -4/3$ basta observar que las series en cuestión son $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ respectivamente. Como $\sum \frac{1}{n^2}$ es una serie de términos no negativos y es convergente por ser una serie $p = 2$, la serie converge absolutamente para $x = -2/3$.

Por otra parte, como $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$, entonces $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente.

Finalmente, podemos resumir que la serie converge absolutamente si $x \in [-4/3, -2/3]$ y diverge si $x \in (-\infty, -4/3) \cup (-2/3, +\infty)$.

3. Para dar los valores de x para los cuales $\sum \left(\frac{(1-x)n^3}{2n^3+2} \right)^n$ sea convergente, utilizamos el Criterio de Cauchy (5.6.3).

Como $n^3 > 0$ y $2n^3 + 2 > 0$, entonces

$$\left| \left(\frac{(1-x)n^3}{2n^3+2} \right)^n \right| = \left(\frac{|1-x|n^3}{2n^3+2} \right)^n.$$

Luego, el límite que debemos calcular cumple:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{(1-x)n^3}{2n^3+2} \right)^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{|1-x|n^3}{2n^3+2} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x|n^3}{2n^3+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x|n^3}{n^3(2 + \frac{2}{n^3})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x|}{2 + \frac{2}{n^3}} = \frac{|1-x|}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, por el Criterio de Cauchy (5.6.3), la serie converge absolutamente si se cumplen:

$$\begin{aligned} \frac{|1-x|}{2} &< 1 \\ |1-x| &< 2 \\ -2 &< 1-x < 2 \\ -3 &< -x < 1 \\ -1 &< x < 3 \end{aligned}$$

y además la serie resulta divergente si

$$|1 - x| > 2$$

$$x > 3 \text{ ó } x < -1.$$

Podemos afirmar que el radio de convergencia de la serie es $r = 2$.

Analizamos la convergencia de la serie para $x = -1$. En este caso, la serie resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - (-1))n^3}{2n^3 + 2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3}{2n^3 + 2} \right)^n.$$

Notemos que el término general de la serie no cumple con la condición necesaria para la convergencia (ver Teorema 5.3.5):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^3 + 2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 + 2 - 2}{2n^3 + 2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2n^3 + 2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{2n^3 + 2} \right)^{-\frac{2n^3 + 2}{2}} \right]^{-\frac{2n}{2n^3 + 2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{2n^3 + 2} \right)^{-\frac{2n^3 + 2}{2}} \right]^{-\frac{2}{n^2(2 + \frac{2}{n^3})}} = \\ &= e^0 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Luego, si $x = -1$, la serie es divergente.

En el caso de $x = 3$, observemos que la serie de potencias resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - 3)n^3}{2n^3 + 2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^3}{2n^3 + 2} \right)^n$$

cuyo término general no converge a 0. Luego, nuevamente no cumple la condición necesaria para que la serie resulte convergente (ver Teorema 5.3.5) y, por lo tanto, la serie diverge.

Concluimos que que la serie de potencias converge absolutamente si $x \in (-1, 3)$ y diverge si $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

4. Debemos estudiar la serie de potencias $\sum \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+2)6^n} (2x-4)^n$. Usemos el Criterio de Cauchy (5.6.3) y calculamos el límite que sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+2)6^n} (2x-4)^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{n+1}}}{\sqrt[n]{n+2}} \frac{|2x-4|}{6} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{1 + \frac{2}{n}}} \frac{|2x-4|}{6} = \frac{|2x-4|}{6}. \end{aligned}$$

Sabemos que la serie converge absolutamente si

$$\begin{aligned} \frac{|2x-4|}{6} &< 1 \\ |2x-4| &< 6 \\ |2(x-2)| &< 6 \\ |x-2| &< 3 \\ -3 &< x-2 < 3 \\ -1 &< x < 5, \end{aligned}$$

y también sabemos que la serie diverge si

$$\begin{aligned} \frac{|2x-4|}{6} &> 1 \\ x &< -1 \quad \text{ó} \quad x > 5. \end{aligned}$$

Observemos que el radio de convergencia es $r = 3$. Falta que analicemos los bordes del intervalo de convergencia.

Primero trabajemos con el caso $x = 5$. La serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+2)6^n} (2 \cdot 5 - 4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}.$$

El límite del término general de la serie es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{n(1 + \frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{n}} = 0.$$

Además de concluir que la serie cumple la condición necesaria para la convergencia (ver Teorema 5.3.5), notemos que el término general de la serie se comporta como $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el infinito. Luego utilicemos el Criterio de comparación por paso al límite (5.4.3) para comparar la serie con $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que diverge por ser serie $p = \frac{1}{2}$. Calculemos el límite siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{n}} = 1 > 0.$$

Luego podemos afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ es divergente.

Para el caso $x = -1$, tenemos la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+2)6^n} (2 \cdot (-1) - 4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}.$$

Notemos que la serie no converge absolutamente, pues si aplicamos módulo obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2},$$

que por el caso $x = -1$ sabemos que no converge. Entonces usamos el Criterio Leibniz para series alternadas (5.5.1). Debemos verificar si se cumplen las hipótesis del criterio.

Si consideramos $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$, entonces $a_n > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Vemos si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Con este objetivo analizamos la monotonía de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ para $x \geq 1$. Calculamos la derivada de f :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+2) - \sqrt{x+1}}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{x+1}(x+2)^2}.$$

Notemos que $f'(x) < 0$ si $x \geq 1$ y por lo tanto f es decreciente. Luego $a_n = f(n)$ es decreciente.

Como se cumplen todas las hipótesis del Criterio de Leibniz (5.5.1), la serie resulta convergente y al no converger absolutamente, su convergencia es condicional.

Concluimos que la serie converge absolutamente si $x \in (-1, 5)$, converge condicionalmente si $x = -1$ y diverge si $x \in (-\infty, -1) \cup [5, +\infty)$.

Ejemplo 5.7.3: Serie de potencias

Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{n+1}}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} x^n$$

converja si y solo si $x \in (-3, 3]$.

Resolución: Trabajemos como lo hicimos en los ejemplos anteriores, aplicando el Criterio de Cauchy (5.4.5):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n a^{n+1}}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} x^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^{n+1} |x|^n}{4^n 2 \sqrt{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a| \sqrt[n]{|a|}}{4 \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{\sqrt{n+1}}} |x| = \frac{|a| |x|}{4}. \end{aligned}$$

Por el Criterio de Cauchy (5.6.3), la serie converge absolutamente si $\frac{|a||x|}{4} < 1$ y diverge si $\frac{|a||x|}{4} > 1$. Notemos que si $a = 0$, la serie es nula y converge para todo número real x . Luego $a \neq 0$.

La serie converge absolutamente si x cumple

$$\frac{|a||x|}{4} < 1$$

$$|x| < \frac{4}{|a|}.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $r = \frac{4}{|a|}$. Como la serie converge en el intervalo $(-3, 3]$, el radio de convergencia es 3. Luego a cumple:

$$\frac{4}{|a|} = 3$$

$$|a| = \frac{4}{3}$$

$$a = -\frac{4}{3} \quad \text{ó} \quad a = \frac{4}{3}.$$

Si $a = -\frac{4}{3}$, reescribiendo la serie obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} x^n &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1} 4^{n+1}}{3^{n+1} 4^n 2 \sqrt{n+1}} x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

Por el Criterio de Cauchy (5.6.3), sabemos que la serie converge absolutamente en $(-3, 3)$ y diverge en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Nos resta ver si cumple el enunciado: si $x = 3$ la serie converge y si $x = -3$ diverge.

Si $x = 3$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{3\sqrt{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3\sqrt{n+1}}.$$

Notemos que el término general se comporta en el infinito como $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Entonces usemos el Criterio de Comparación por paso al límite (5.4.3) para comparar con la serie $p = \frac{1}{2}$. Calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{3} > 0.$$

Luego la serie $\sum \frac{(-1)^n a^{n+1}}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} x^n$ diverge en $x = 3$ si $a = -\frac{4}{3}$. Entonces $a \neq -\frac{4}{3}$.

Si $a = \frac{4}{3}$, la serie es

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} x^n &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{3^{n+1} 4^n 2\sqrt{n+1}} x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

Al igual que antes, por el Criterio de Cauchy (5.6.3) la serie converge absolutamente en $(-3, 3)$ y diverge en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Chequeemos si cumple con lo pedido en los bordes del intervalo de convergencia.

Si $x = 3$, la serie resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{3\sqrt{n+1}}.$$

Para saber si converge, primero nos fijamos si lo hace absolutamente. Si aplicamos módulo al término general obtenemos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 2}{3\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3\sqrt{n+1}}$$

que ya vimos que diverge. Luego la serie no converge absolutamente. Como es una serie alternada, podría converger condicionalmente. Veamos si la serie cumple con las hipótesis del Criterio de Leibniz (5.5.1). Tomemos $a_n = \frac{2}{3\sqrt{n+1}}$ que es una sucesión positiva y tiende a cero en el infinito. Es fácil ver que es decreciente pues son verdaderas las desigualdades que siguen:

$$\begin{aligned} n+1 &< n+2 \\ \frac{2}{3\sqrt{n+1}} &> \frac{2}{3\sqrt{n+2}} \\ a_n &> a_{n+1}. \end{aligned}$$

Luego la serie converge condicionalmente.

Si $x = -3$ ya hemos notado que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3\sqrt{n+1}}$$

resulta divergente. Por lo que la serie cumple lo pedido.

Finalmente concluimos que $a = \frac{4}{3}$.

Los siguientes teoremas los dejaremos sin demostración, son importantes pues dan condiciones sobre la derivabilidad e integrabilidad de una serie de potencias. Más aún, en ese caso proveen formas explícitas para calcularlas. También permiten calcular desarrollos en series de potencias de funciones conocidas.

Teorema sobre la continuidad e integrabilidad de la serie de potencias (5.7.4): Una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

que converge absolutamente en $(a - r, a + r)$ resulta continua en dicho intervalo.

Por lo tanto, f es integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $(a - r, a + r)$. Además, para todo $x \in (a - r, a + r)$ vale

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^x a_n (t - a)^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - a)^{n+1}.$$

Observemos que los términos del desarrollo de la primitiva de f los obtenemos integrando los términos del desarrollo de f .

Teorema sobre la derivabilidad de la serie de potencias (5.7.5): Si para todo $x \in (a - r, a + r)$ la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

converge absolutamente, entonces en el intervalo $(a - r, a + r)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$

converge absolutamente y $f(x)$ resulta derivable en dicho intervalo. Además para todo $x \in (a - r, a + r)$ vale

$$f'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - a)^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}.$$

Notemos que los términos del desarrollo en serie de potencias de la derivada de f los encontramos derivando los términos del desarrollo de f .

Observación: La escritura de una función como serie de potencias alrededor de a es única.

Ejemplo 5.7.6: Desarrollo en serie de potencias

Desarrollar en serie de potencias alrededor del 0 y especificar el radio de convergencia de dicha serie:

1. $f(x) = e^x.$

4. $f(x) = xe^{-x}.$

2. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}.$

3. $f(x) = \ln(x+1).$

5. $f(x) = \int_0^x e^{t^3} dt.$

Resolución:

1. Para desarrollar en serie la función $f(x) = e^x$, recordemos que en el capítulo anterior hemos calculado su polinomio de Maclaurin de orden n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Por otro lado la diferencia entre la función y el polinomio de Maclaurin de orden n es

$$f(x) - p_n(x) = R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

donde c es un número entre x y 0. Como $f^{(n+1)}(c) = e^c$, entonces para $x \in \mathbb{R}$ fijo tenemos

$$|f(x) - p_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Vemos que dicha diferencia converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Si calculamos el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^c}{(n+2)!} |x|^{n+2}}{\frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1,$$

por el Criterio de D'Alembert para sucesiones (1.2.7) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0.$$

Concluimos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Entonces afirmamos que el desarrollo en serie de la función es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Como hemos visto en el primer ejemplo de series de potencias, la serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$, luego el radio de convergencia es $r = +\infty$.

Hemos obtenido una nueva definición para el número e como una suma infinita o como el límite de la sucesión de sumas parciales, reemplazando x por 1 en la serie de potencias de $f(x) = e^x$:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

2. Para desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, recordemos que si $|r| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Reescribamos la función del siguiente modo

$$f(x) = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Si consideramos $r = \frac{x^2}{4}$ y $\left| \frac{x^2}{4} \right| < 1$, vale la igualdad que sigue

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4} \right)^n.$$

Entonces si $x \in (-2, 2)$ el desarrollo en serie alrededor de 0 de f es

$$f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$$

y el radio de convergencia es $r = 2$.

3. Debemos desarrollar la función $f(x) = \ln(x+1)$ en serie alrededor de 0. Notemos que $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.

Si tomamos $r = -x$ con $|-x| < 1$ podemos escribir la función como una serie geométrica de razón $-x$ y obtener

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Como la serie converge absolutamente si $x \in (-1, 1)$, por el Teorema sobre la integrabilidad de la serie de potencias (5.7.4), podemos integrar f' :

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt$$

$$f(x) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x.$$

Como $f(0) = \ln(0+1) = 0$ el desarrollo en serie de la función es

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

La serie converge absolutamente para $x \in (-1, 1)$ y su radio de convergencia es 1.

4. En este punto debemos escribir como serie de potencias alrededor de 0 a $f(x) = xe^{-x}$.

En el primer punto de este ejemplo hemos visto que para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Luego para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$xe^{-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}.$$

Podemos concluir que para todo $x \in \mathbb{R}$ el desarrollo en serie pedido es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

y su radio de convergencia de la serie es $+\infty$.

5. Debemos desarrollar en serie de potencias alrededor de 0 a la función

$$f(x) = \int_0^x e^{t^3} dt.$$

Si usamos nuevamente que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y dicha serie converge absolutamente, entonces tenemos

$$f(x) = \int_0^x e^{t^3} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3)^n}{n!} dt.$$

Por el Teorema sobre la integrabilidad de la serie de potencias (5.7.4), podemos calcular la integral para obtener el desarrollo en serie de potencias de f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{3n}}{n!} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)n!} \Big|_0^x.$$

Entonces el desarrollo en serie de potencias pedido es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y su radio de convergencia es $+\infty$.

Ejercicios

Ejercicio 5.7.1: Dar los valores de $x \in \mathbb{R}$ en los que las series de funciones convergen absolutamente y en cuáles convergen condicionalmente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n^4}.$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2x-9)^{n+1}.$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}(x-3)^n}{7n}.$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})x^{n+3}.$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{x^{3n}}.$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n}(x+1)^{3n}.$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{\sqrt{n^2+n}(3x-1)^n}.$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^n}n}{5^n}.$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)x^{3n}.$

Ejercicio 5.7.2: Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y en los casos en los cuales el radio es finito, encontrar el centro.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n n! (x+20)^n}{n^n}.$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{4}{n})^{n^3} (2x+1)^{3n}}{5^n}.$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k^2}.$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 (x-6)^{2n+3}}{(2n)!}.$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{\sqrt{k}}.$

e. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-8x)^k}{3^{k+1}}.$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} n!}{n^n}.$

Ejercicio 5.7.3: Hallar una fórmula para el término general y determinar el radio de convergencia de las siguientes series.

a. $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{20} + \dots$

d. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$

b. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

e. $1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \dots$

c. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

f. $x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$

Ejercicio 5.7.4: Encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que el radio de convergencia de

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3a+2)^n}{n^3+n} (x-4)^n$ sea 5. b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3x-5)^n}{a^n\sqrt{3n-1}}$ sea $\frac{7}{3}$.

Ejercicio 5.7.5: Desarrollar f en series de potencia alrededor del 0 y especificar el radio de convergencia.

a. $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

g. $f(x) = \ln(1-x)$.

b. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$.

h. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

c. $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$.

i. $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

d. $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+4x+3}$.

j. $f(x) = \int_0^x \ln(1+t) dt$.

e. $f(x) = \operatorname{sen} x$.

k. $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} dt$.

f. $f(x) = xe^{-2x}$.

Resultados del cálculo diferencial

En esta sección presentamos algunos resultados y definiciones que vieron en materias anteriores y serán necesarios a lo largo del curso. No pretendemos ser exhaustivos, sino simplemente lo repetimos porque resulta cómodo tenerlos a mano a la hora de estudiar los temas introducidos en este escrito. Contiene las definiciones básicas del análisis matemático, algunas tablas relacionadas con resultados trigonométricos, reglas de derivación, propiedades de los límites y el enunciado de algunos teoremas importantes que son citados a lo largo del libro.

1.1 Trigonometría

Identidades trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$
- $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Recordar que el seno es impar y el coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \text{ y } \cos(-x) = \cos(x).$$

Tabla de valores de funciones trigonométricas

Grados	0°	30°	45°	60°	90°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mathcal{A}$

1.2 Sucesiones

Definición: Una *sucesión* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una función del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Proposición sobre el álgebra de límites de sucesiones (1.2.1): Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones.

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces
 - a. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$
 - b. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
 - c. $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$ con $c \in \mathbb{R}$
 - d. Si $b \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 - e. Si alguno de los límites a o b no es cero y $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces
 - a. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$
 - b. Si $a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces
 - a. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = +\infty$
 - b. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = +\infty$
4. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces
 - a. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

- b. Si $b = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
5. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ con $a \in \mathbb{R}_{>0} - \{1\}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, entonces
- a. Si $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$
- b. Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = +\infty$

Indeterminaciones

Recordemos en cuáles circunstancias un límite no queda determinado por su forma (es decir, cuándo es indeterminado). Las siguientes expresiones están escritas de manera informal y representan los límites de sucesiones o de funciones.

$$“\infty - \infty”, \quad “\frac{\infty}{\infty}”, \quad “\frac{0}{0}”, \quad “0^0”, \quad “0 \cdot \infty”, \quad “1^\infty” \text{ y } “\infty^0”.$$

Proposición del Sandwich (1.2.2): Sean tres sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si se cumple que a partir de un n fijo $a_n \leq b_n \leq c_n$ y además $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Además, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

Del resultado anterior es sencillo deducir el siguiente corolario.

Corolario (1.2.3): Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Definición: Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del mismo modo, es *monótona decreciente* si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usamos el término *monótona* para indicar que es monótona creciente o decreciente.

Proposición sobre sucesiones monótonas (1.2.4): Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si y solo si es acotada.

Subsucesiones

Definición: Dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, una *subsucesión* de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión dada $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ en donde n_k cumple la igualdad $f(k) = n_k$ con $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

Proposición sobre subsucesiones (1.2.5): Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que cumple que las subsucesiones de términos pares, $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, e impares, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, ambas convergen a L , entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también converge a L .

Criterios de convergencia de sucesiones

Criterio de Cauchy (1.2.6): Dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = L$, vale que

1. si $L < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. si $L > 1$ o $L = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Criterio de D'Alembert (1.2.7): Dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = L$, vale que

1. si $L < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. si $L > 1$ o $L = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Límites especiales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Factorial

Recordemos antes de terminar esta sección la definición inductiva de *factorial*.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

De manera más informal, se define el factorial de n como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

1.3 Límites de funciones

Para calcular el límite tanto puntual o en el infinito de una función, también podemos usar el álgebra de límites y la proposición de la sección anterior intercambiando las sucesiones por funciones. Luego, de la misma manera, tenemos algunos límites que quedan determinados.

Límites determinados:

Las siguientes expresiones están escritas de manera informal y representan los límites de funciones.

$$“\infty \cdot \infty = \infty”$$

$$“a \cdot \infty = \infty” \quad \text{si } a \neq 0$$

$$“\frac{a}{\infty} = 0”$$

$$“\frac{a}{0} = \infty” \quad \text{si } a \neq 0$$

$$“0 \cdot \text{acotado} = 0”$$

$$“a^{+\infty} = 0” \quad \text{si } 0 < a < 1$$

$$“\infty + \infty = \infty”^*$$

$$“a^{+\infty} = +\infty” \quad \text{si } a > 1$$

*Solo si los primeros dos infinitos tienen el mismo signo, en cuyo caso el tercero tendrá el mismo signo también.

Límites especiales

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1.4 Continuidad

Definición: Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua* en $x_0 \in (a, b)$ si f está definida en x_0 y los siguientes límites (existen y) cumplen

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Teorema de Bolzano (1.4.1): Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no tiene ceros en (a, b) , entonces o bien $f(x) > 0$ para todo x en (a, b) o bien $f(x) < 0$ para todo x en (a, b) .

1.5 Derivabilidad

Definición: Decimos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *derivable* en $x_0 \in (a, b)$ un elemento del dominio de f , y en tal caso notamos $f'(x_0)$, si los siguientes límites existen y cumplen

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definición: La *recta tangente* al gráfico de f en el punto $(x_0; f(x_0))$ es la recta que tiene como pendiente $f'(x_0)$ y pasa por el punto $(x_0; f(x_0))$. Es decir, la recta que tiene ecuación $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Tabla de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
<i>cte</i>	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x ^{*1}	$\ln(a) \cdot a^x$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$

$f(x)$	$f'(x) dx$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{arc tg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arc sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{senh}(x)$ ^{*2}	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$ ^{*2}	$\text{senh}(x)$

(^{*1}) donde a es un número real positivo

(^{*2}) Recordar: $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Reglas de derivación

Regla de la linealidad de la derivada (1.5.1): Sean f y g dos funciones derivables en x_0 y sean α y β dos números reales, entonces

$$[\alpha \cdot f + \beta \cdot g]'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0).$$

Regla del producto (1.5.2): Dadas f y g dos funciones derivables en x_0 , entonces

$$[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Regla del cociente (1.5.3): Dadas f y g dos funciones derivables en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, entonces

$$\left[\frac{f}{g} \right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Regla de la cadena (1.5.4): Dadas una función g derivable en x_0 y f una función derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y vale

$$[f \circ g]'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Algunos resultados importantes

Teorema del Valor medio de Lagrange (1.5.5): Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Teorema del Valor medio de Cauchy (1.5.6): Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$. En particular si $g(a) \neq g(b)$, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

1.6 Regla de L'Hôpital

Teorema de L'Hôpital (1.6.1): El siguiente teorema es muy útil para resolver indeterminaciones del tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ " y " $\frac{0}{0}$ ".

Si se tienen dos funciones f y g ambas derivables, entonces

1. *Caso $\frac{\infty}{\infty}$:* si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ y existe el límite de la derecha vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. *Caso $\frac{0}{0}$:* si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ y existe el límite de la derecha vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En ambos casos x_0 puede ser un número real o $x_0 = \infty$.

1.7 Crecimiento, máximos y mínimos

Definición: Una función f es *creciente* en un intervalo (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ que cumplen $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$ (y f es estrictamente creciente si la relación de orden es estricta, es decir $f(x_1) < f(x_2)$).

Análogamente, f es *decreciente* en un intervalo (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ que cumplen $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$ (y f es estrictamente decreciente si la relación de orden es estricta, es decir $f(x_1) > f(x_2)$).

Definición: Una función f continua tiene un *máximo local* en x_0 si existe un intervalo (a, b) tal que $x_0 \in (a, b)$ y f es creciente en (a, x_0) y decreciente en (x_0, b) . De la misma manera, una función tiene un *mínimo local* en x_0 si existe un intervalo (a, b) tal que $x_0 \in (a, b)$ y f es decreciente en (a, x_0) y creciente en (x_0, b) .

Definición: Decimos que una función f tiene un *máximo absoluto* en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo elemento x del dominio de f . Del mismo modo, la función tiene un *mínimo absoluto* en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo elemento x del dominio de f .

Teorema de Weierstrass (1.7.1): Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$.

Proposición (1.7.2): Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable con $f'(x) \geq 0$ en (a, b) , entonces f es creciente en (a, b) . Más aún, si $f'(x) > 0$ en (a, b) , entonces f es estrictamente creciente en (a, b) .

En cambio, si $f'(x) \leq 0$ en (a, b) , resulta que f es decreciente en (a, b) y si $f'(x) < 0$ en (a, b) , entonces f es estrictamente decreciente en (a, b) .

Proposición (1.7.3): Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable con $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es constante en (a, b) .

Criterio de la primera derivada (1.7.4): Dados $x_0 \in (a, b)$ y una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b) y derivable en (a, b) , salvo quizás en x_0 . Resulta que:

1. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, f tiene un máximo local en x_0 .
2. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, f tiene un mínimo local en x_0 .

Criterio de la segunda derivada (1.7.5): Dados $x_0 \in (a, b)$ y una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable y $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0 y si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0 .

Índice alfabético

Arquímedes de Siracusa, 23

área entre curvas, 55

capacidad de carga, 97

combinación lineal, 147

convergencia

absoluta, 240

condicional, 240

de integrales impropias, 75

criterio

integral de Cauchy, 228

criterio de

Cauchy

para series, 243

para sucesiones, 272

comparación

directa, 224

por paso al límite, 226

D'Alembert

para series, 246

para sucesiones, 272

la primera derivada, 276

la segunda derivada, 277

Leibniz, 235

desigualdad triangular, 185

discriminante, 142

divergencia

de integrales impropias, 75

ecuación diferencial, 85

de variables separables, 94

homogénea asociada, 154

lineal

de primer orden, 103

de segundo orden con

coef. ctes., 139

homogénea, 103, 140

homogénea asociada, 106

no homogénea, 106, 154

orden de, 85

Eratóstenes de Cirene, 90

error

de Taylor, 188

factorial, 272

función

continua, 273

creciente, 276

decreciente, 276

derivable, 274

integrable, 3

- integral, 8
 - fórmula
 - de Taylor, 176
- identidades trigonométricas, 269
- indeterminaciones, 273
- integración
 - numérica, 71
 - por fracciones simples, 39
 - por partes, 35
 - por sustitución, 29
- integral
 - impropia, 75
 - de primera especie, 76
 - de segunda especie, 76
 - de tercera especie, 76
 - indefinida, 21
 - propiedades, 5
- intervalo
 - de convergencia, 252
 - maximal, 90
- linealidad
 - de las series, 215
- linealmente independiente, 147
- longitud de arco, 62
- modelo de
 - crecimiento exponencial con cosecha, 114
 - crecimiento poblacional, 91
 - desintegración radioactiva, 92
 - disolución química, 115
 - enfriamiento de Newton, 112
 - resorte, 152
- Montecarlo, 74
- máximo
 - absoluto, 276
 - local, 276
- método de
 - Euler, 130
 - variación de constantes, 106
- mínimo
 - absoluto, 276
 - local, 276
- números complejos, 142
- polinomio
 - característico, 142
 - de Maclaurin, 177
 - de Taylor, 175
- potencial biótico, 91, 97
- primitiva, 21
- principio de Cavalieri, 57
- problemas de valores iniciales, 88
- propiedad
 - del Sandwich, 271
- radio de convergencia, 252
- recta tangente, 274
- regla
 - del trapecio, 71
 - de Barrow, 22
 - de la cadena, 275
 - del cociente, 275
 - del producto, 274
- resorte
 - amortiguado, 152
 - con forzamiento externo, 171
- Resto de Taylor, 188
- serie, 206
 - p , 214
 - alternada, 235
 - armónica, 208
 - condición necesaria, 216
 - convergente, 206
 - de funciones, 250
 - de potencias, 252

- de términos no negativos, 224
- divergente, 207
- geométrica, 209
- telescópica, 212
- subespacio vectorial, 147
- subsucesión, 271
- sucesión, 270
 - monótona, 271
 - monótona creciente, 271
 - monótona decreciente, 271
- sumas parciales, 206
- tabla
 - de derivadas, 274
 - de valores de funciones trigonométricas, 270
- teorema
 - de Bolzano, 273
 - de Cauchy, 275
 - de continuidad e integrabilidad de la serie de potencias, 262
- de derivabilidad de la serie de potencias, 262
- de existencia y unicidad, 90
- de L'Hôpital, 275
- de Taylor, 179
- de valor medio, 275
- de valor medio integral, 26
- de Weierstrass, 276
- fundamental del cálculo, 13
- fundamental del cálculo generalizado, 16
- Torricelli
 - trompeta de, 68, 82
- valor medio, 25
- variables separables, 94
- variación de constantes, 106
- volumen de un sólido de revolución, 65

Bibliografía

- Apostol, T.M. (1995). *Calculus*. 2da edición. Volumen I. México: Reverté.
- Authier, M. (1991). «Arquímedes: El canon del sabio». En: *Historia de las ciencias*. Ed. por M. Serres. Madrid: Cátedra.
- Chapra, S.C. y R.P. Canale (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Jeffries, S. y col. (2003). «Trends and status of harbor seals in Washington State: 1978-1999». En: *The Journal of Wildlife Management*, págs. 207-218.
- Nagle, R.K., E.B. Saff y A.D. Snider (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4ta edición. México: Pearson Educación.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral*. Volúmenes I y II. Moscú: Mir.
- Sarton, G. (1965). «Geografía y cronología en el siglo tercero. Eratóstenes de Cirene». En: *Historia de la ciencia*. Biblioteca el Hombre y su Sombra: la Vida de la Ciencia Vol. 3, Ciencia y cultura helenísticas en los últimos tres siglos a.C. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo: trascendentes tempranas*. 7ma edición. México: Cengage Learning.