

Escuela Superior de Comercio “Carlos Pellegrini” – UBA

‘LA ESCUELA ACOMPAÑA TU ESFUERZO’

MÓDULO MATEMÁTICA

Primer año

Enero - Febrero 2017



Estimada Familia:

El día 16 de enero comienza el curso *La escuela acompaña tu esfuerzo*. La materia MATEMÁTICA para primer año se dictará en 3 cursos los lunes, miércoles y viernes de 9 a 10:20 hs, de 10:30 a 11:50 y de 12 a 13:20. La profesora a cargo será Verónica Spraggon.

En el curso se trabajarán contenidos nodales de la materia:

- **Operatoria:** las seis operaciones básicas, suma, resta, multiplicación, división potenciación y radicación en los distintos conjuntos numéricos; naturales, enteros y racionales. Prioridad de las mismas. Propiedades: distributiva, de la potenciación y radicación.
- **Expresiones algebraicas. Ecuaciones:** operaciones, aplicación de propiedades. Cuadrado de binomio. Resolución de ecuaciones en distintos conjuntos numéricos. Análisis del conjunto solución.
- **Geometría:** Ángulos. Clasificación. Ángulos entre rectas paralelas, propiedades. Demostraciones. Repaso de las propiedades de los triángulos.

El objetivo del curso es revisar y profundizar los contenidos que se detectaron como más dificultosos para los/as estudiantes, quienes deberán completar en forma personal aquellos temas del programa que no se vean en este curso pero que, dependiendo de su docente, los hayan trabajado durante el año (por ejemplo divisibilidad, demostraciones de las propiedades de los triángulos, criterios de congruencias, etc.).

Cabe señalar que este curso no tiene carácter vinculante con el examen.

Los/as estudiantes deberán asistir a las clases con el material correspondiente y cumplir con las tareas pedidas. Dicho material será:

1. una Guía de ejercitación para este curso, que se dejará en la fotocopiadora de la librería GAMA.
2. la Guía anual de cada profesor/a.

Se recuerda que a partir del 6 de febrero comenzarán las clases de apoyo de la materia (ver horarios en <http://www.cpel.uba.ar/nota.php?idnota=506&sec=19>), allí podrán realizar las consultas de todo aquello que no se vea en este curso.

Un cordial saludo,

Ana Mastroianni y Hugo Negrin
Departamento de Matemática

1. Marcá con una X los conjuntos a los cuales pertenecen los siguientes números:

	2	-8	0,25	0	$-\frac{2}{3}$	-1,32	$(-5)^2$	-5^2	$\sqrt{16}$	$\sqrt[3]{-8}$
N										
Z										
Q										

2. En cada caso, uní con una flecha cada expresión con su resultado correspondiente.

a) $12 - 4 - 5 + 2 - 7 + 4 - 1 + 6 =$ 9
 $12 - (4 - 5) + 2 - (-7 + 4 - 1) + 6 =$ 25
 $12 - 4 - [5 + 2 - (-7 + 4) - 1] + 6 =$ 7
 $12 - (4 - 5 + 2) - (-7 + 4 - 1 + 6) =$ 5

b) $6 \cdot 5 - 2 : 2 + 1 =$ 28
 $6 \cdot (5 - 2) : (2 + 1) =$ 30
 $6 \cdot 5 - (2 : 2 + 1) =$ 25
 $6 \cdot (5 - 2 : 2) + 1 =$ 6

3. Calculá:

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 8 + 5^2 : 5 - 2} =$ b) $8 + 18 : 3^2 \cdot 2 - 2 =$
c) $3 \cdot (9 + 3^2) - 3 - 3 =$ d) $3 \cdot (9 + 3)^2 \cdot (3 - 3) =$

4. Calculá:

a) $(-5)^0 - (15 - 10 : 5 - \sqrt[3]{-27}) =$
b) $-3 \cdot [\sqrt[3]{-8} : (-2) - (4 - 6)^2] =$
c) $(-3)^3 - \{ -8 - [\sqrt{36 - 22 : 2} - 2^2 \cdot 3] \} =$

5. Calculá

a) $-\sqrt[3]{(4-5) : (-1)^5 + \sqrt{5^2 - 4^2} - (-7+5)^2 : (-2) + 2} =$
b) $-(-2^3 + 6)^2 - \sqrt[5]{(-2)^2 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (-1)^{10}} =$
c) $-5 - (-\sqrt[3]{(-3)^4 + 51 : (-3)}) - (-3^3 + 10 : 5 + 5) =$
d) $21 : (-4 + 4 : 4) - \sqrt[3]{(20 - 3 \cdot 4) : (-1)^5} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{13^2 - 5^2}} =$

6. a) Completá la tabla.

Fracción irreducible	Otra fracción equivalente	Expresión decimal
	$24/15$	
		$-3,2$
$2/3$		
	$-22/10$	

b) De los siguientes números, $-3/2$; $5/3$; $-2/-3$; $8/9$; $-0,27$; -2 ; $-1/2$, indicá cuáles son:

i. menores que 0.

ii. mayores que 0 y menores que 1.

iii. mayores que 1.

iv. menores que -1 .

7. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

Marcá con una X en el casillero correspondiente.

	V	F
El opuesto de $-\frac{2}{-3}$ es $\frac{2}{3}$.		
El opuesto de $-\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3}$.		
La fracción irreducible de $\frac{125}{30}$ es $\frac{12,5}{3}$		
$\frac{125}{30} = \frac{12,5}{3}$		
$1,3 = \frac{1}{3}$		
$1,3 = \frac{13}{10}$		
$\frac{5}{7} = 0,71$		
$\frac{1}{3} \cong 0,33$ ($\frac{1}{3}$ es aproximadamente igual a 0,33)		
El opuesto de $b - \frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3} - b$		
El opuesto de $b - \frac{2}{3}$ es $-\frac{2}{3} + b$		

8. Calculá y expresá el resultado como una fracción irreducible.

a) $\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{5}{3} =$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} + \left(-2 + \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) =$

c) $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{2}} =$

d) $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{3}} =$

e) $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 - \frac{1}{4}} =$

9. Calculá:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^2}{3} - 2\right)^{-1} : \sqrt{\frac{9}{16}} =$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \sqrt[3]{-\left(1 - \frac{7}{8}\right)} =$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-2} =$

d) $\frac{\sqrt{2 - \frac{82}{49}}}{\sqrt{\left(\frac{5}{7} - 1\right)^2}} + \left(\frac{1}{2} - 7^8\right)^0 =$

10. Calculá:

a) $\sqrt{-\frac{1}{2} : (-2)} + \sqrt{3^{-1} : 3} =$

b) $\frac{(1 - 3^{-1})^2}{1 - \sqrt{\frac{9}{4}}} =$

c) $\frac{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}}}{-\left(\frac{3}{5} : 3\right)^{-1}} + 1 =$

11. Calculá:

$$\left[\left(\frac{1}{3} - 2\right)^2 : \frac{3}{5} - 4 \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{16}} + 3^{-1} \cdot \sqrt[3]{-\frac{125}{27}} \right] \cdot (-1)^{23} =$$

12. Calculá: a) $|-7| + |-3 + 8| =$ b) $-4 + 5 \cdot (-1) + |-5 - (-7)| =$ c) $\left| -\frac{3}{5} \right| + \left| 2 - \frac{5}{2} \right| - \frac{3}{4} =$

13. Si $a = \frac{1}{2}$; $b = -3$; $c = \frac{1}{4}$ y $d = -2$, completá con $<$, $>$ o $=$ según corresponda.

a) $|b + 1| \dots\dots d$

b) $\left| \frac{1}{b} \right| \dots\dots 2c$

c) $|a - d| \dots\dots 2,4$

d) $|a + b| \dots\dots \frac{5}{2}$

e) $|2c - 1| \dots\dots a$

14. Uní con una flecha cada expresión de la columna de la izquierda con su respectiva expresión equivalente de la derecha.

$2.(a-b) - (-b-a)$	$a+b$
$-2.(-a-b) + (-b-a)$	$-a-3b$
$-(-a+b) - 2(-b+a)$	$3a-b$
$(a-b) + 2(-b-a)$	$-a+b$

15. Indicá cuál o cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes entre sí:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $5 - 2.(2x - 3y + 2) - (-4x + 3y)$ | b) $1 + 3y - 8x$ |
| c) $5 + 2.(3y - 2x - 2) - (3y + 4x)$ | d) $1 + 3y$ |
| e) $1 - 8x + 6y$ | f) $5 - 2.(2x - 3y + 2) + (-4x + 3y)$ |
| g) $1 + 6 : 2y$ | h) $1 + 9y - 8x$ |

16. Si se sabe que $4(p+q)+8=5$, calculá:

- a) $2(p+q) =$ b) $5 - 10(p+q) =$ c) $3p + 3q + 7 =$
d) $5(p-q) - 6(p+2) + 4q =$

17. Sin resolver la ecuación indicá si el 0 es solución de la ecuación

$$5x - x : 2 = -2(x-3) - 6.$$

18. Decidí si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. *Justificá tu respuesta.*

- a) La ecuación $3(2x-1) - 2(3x+2) = 7$ no tiene solución.
b) Para la ecuación $3(2x-1) - 2(3x+2) = 7$ existe una solución en $\mathbb{Z}$.
c) Para la ecuación $3(2x-1) - 2(3x+2) = -7$ existen infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$.
d) La ecuación $3(2x-1) - 2(3x+2) = -7$ tiene solución en $\mathbb{Z}$.

19. Resolvé las siguientes ecuaciones en N y $\mathbb{Z}$. Escribí el conjunto solución en cada caso.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $4x + 24 = 8 - 2x - 2$ | b) $2.(a-5) = 2.3.a - 24 : 3 + 2$ |
| c) $5 - (y-12) + 2y.4 = -3.(y+6)$ | d) $(5-x)(2+b) = b(5-x) + (10-2x) : 2$ |

20. Indicá cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- a) El conjunto solución de la ecuación $|x-1|=5$ en $\mathbb{Z}$ es $S_{\mathbb{Z}} = \{-4; 6\}$.
b) El conjunto solución de la ecuación $|x-1|=-2$ en $\mathbb{Z}$ es $S_{\mathbb{Z}} = \{-1; 3\}$

21. Resolvé en $\mathbb{Z}$:

a) $2|x-3| = |-4+1| + (-9) : (-3)$

b) $|-2x| = 6 - 4\sqrt{16}$

c) $|3x-1| + 2(-3) = |-(5-1)| - \sqrt[3]{-27} : (-3) + 3$

d) $4 - |x+1| = -2|10-3.2| - 10 : (-5)$

22. ¿Para qué valores de $\mathbb{Z}$ se cumplen las siguientes desigualdades? *Indicá el conjunto solución.*

a) $2x < -4 : 2$

b) $4 - 3x \leq -x + |-5 + 2.2| + 1$

c) $2(-3x+4) + 5x \geq 3x + |-6| + 2(-1)^3$

23. Escribí como una única potencia:

a) $a^5 \cdot a^3 : a^4$

b) $\frac{b^3 \cdot b^0}{b^2}$

c) $(c^3 \cdot c)^4 \cdot c^5 : c^5$

d) $\left(\frac{d^3}{d}\right)^4 : d^5$

24. Reducí a la mínima expresión:

a) $5(3a^4)^2 =$

b) $(2ab^3)^4 : (2ab) =$

c) $\frac{4(3c)^3(b^2c)^4}{(6bc)^2} =$

25. Uní con una flecha, en los casos que sea posible, las expresiones equivalentes de cada columna.

$(2a)^4 + 2(a^4 + a)$

$16a^5$

$18a^4 + 2a$

$2a^4 + 2a(a^3 + 1)$

$2a^4 + 2a^4 + 2a$

$18a^9$

$2a^4(8+a)$

$16a^4 + 2a^5$

$4a^4 + 2a$

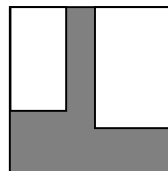
$16a^4 + a$

$16a^4 + 2a^4 + 2a$

$2(8a^4 + a^5)$

26. El **perímetro** de la zona sombreada del cuadrado es $\frac{4}{3}a$.

a) Marcá con una X la o las expresiones que te permite calcular el **área** del cuadrado.



☐ $\frac{a^2}{3}$

☐ $\left(\frac{a}{3}\right)^2$

☐ $\frac{a^2}{9}$

☐ $\frac{a}{9}$

b) Si el área del cuadrado es 4 cm^2 , ¿cuántos centímetros mide su perímetro?

27. a) Calculá aplicando las propiedades de la potenciación:

$$\begin{array}{lll} \text{i. } 6^{-3} : 6^{-2} = & \text{ii. } \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = & \text{iii. } \left(\frac{0}{2}\right)^3 = \\ \text{iv. } \left(\frac{4}{7}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{4}\right)^5 = & \text{v. } [(-5)^{-2}]^{-1} : (-5) = & \text{vi. } (10^{-8} : 10^{-10})^{-1} = \end{array}$$

b) Reducí a la mínima expresión, utilizando únicamente exponentes positivos.

$$\begin{array}{llll} \text{i. } \frac{b^2 b^{-3}}{b^3} = & \text{ii. } \frac{(3^{-2} x)^2}{y^{-3}} = & \text{iii. } \frac{(a^5 x^2 b^{-7})^0}{x^2 x^{-6}} = & \text{iv. } \frac{a^3 (a^{-3} b^2)^{-5}}{(ba^2 b^{-6})^2} = \end{array}$$

28. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$. Indicá, en cada caso, el conjunto solución.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5}{4} \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} x = 2 & \text{b) } \frac{7}{5} \left(\frac{10}{21} x - \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} x : (-2) = x \\ \text{c) } (5 - x) : 2 - \frac{x - 5}{5} = \frac{1}{2} & \text{d) } 2(x - 3) - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} x - 4\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) - 4x \\ \text{e) } \frac{x - 2}{3} - \frac{x + 4}{2} = -\frac{1}{6} (x + 16) & \text{f) } (x - 2)(2x + 3) = 0 \\ \text{g) } (3x + 2)x = 0 & \text{h) } (6 - 2x)(5x + 2)(x + 1) = 0 \end{array}$$

29. Encontrá el valor de k para que $x = -\frac{1}{2}$ sea solución de la ecuación $\frac{4x}{k} - 5 = 6(2 - x)$.

30. Hallá todos los números racionales que cumplan cada una de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 = 9 & \text{b) } 5x^2 = \frac{4}{5} & \text{c) } 3x^2 + 5 = 2 \\ \text{d) } 5(2x - 1)^2 + 3 = 23 & \text{e) } 2(x - 1)^3 = -\frac{27}{4} & \text{f) } (3x - 1)^2 = \left(2 - \frac{1}{5}\right)^2 \\ \text{g) } \frac{\sqrt{x}}{3} = 2 & \text{h) } \frac{\sqrt{x - 4}}{2} - 6 = -1 & \text{i) } \sqrt{3 + 2x} (x - 5)^2 = 0 \end{array}$$

31. Si sabemos que $p^3 = \frac{27}{8}$ y $\sqrt[4]{q} = 2$, calculá:

$$\text{a) } p^2 + q = \quad \text{b) } p^4 - \sqrt{q} =$$

32. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$.

$$\text{a) } |x| = 9 \quad \text{b) } |x + 3| = 5 \quad \text{c) } 2|x - 1| - 4 = 7 \quad \text{d) } |2x - 1| - 4 = 7 \quad \text{e) } 2|x + 7| + 4 = 2$$

33. En cada caso, analizá cuántos números enteros cumplen con la condición indicada y hallá cuáles son.

- a) El cuadrado del siguiente del triple de un número es 25.
- b) El siguiente del cuadrado del triple de un número es 50.
- c) El triple del cuadrado del siguiente de un número es 27.
- d) El triple del cuadrado de un número es igual al cuadrado del triple de dicho número.

34. Desarrollando el cuadrado del binomio, hallá la expresión con la mínima cantidad de términos posible:

- a) $(a+5)^2 =$ b) $(3b-4)^2 =$ c) $(2bc+5a)^2 =$
- d) $2(x+3y)^2 - 2x^2 =$ e) $(2x+y^2)^2 + y(xy-y^3) =$

35. Calificá las siguientes pruebas adjudicando 1 punto por cada ejercicio correctamente resuelto. Todas las letras simbolizan números naturales.

Prueba A

- 1) $(a^5)^2 = a^{25}$
- 2) $a^3 \cdot a \cdot a^4 = a^8$
- 3) $n+n+n = 3n$
- 4) $r^3 r^9 r^2 = r^{36}$
- 5) $(p+3)^2 = p^2 + 9 + 6p$
- 6) $(6ab)^2 = 6a^2 b^2$
- 7) $(n+n+n)^2 = (3n)^2 = 9n^2$
- 8) $2^{18} : (2^6)^3 = 2^{18} : 2^9 = 2^2 = 4$
- 9) $(2a^2 + 3a^2)^3 = (5a^2)^3 = 125a^6$
- 10) $n^2 + n^3 + n^3 = n^2 + 2n^3$

Prueba B

- 1) $(a^5)^2 = a^{10}$
- 2) $a^3 \cdot a \cdot a^4 = a^7$
- 3) $n+n+n = n^3$
- 4) $r^3 r^9 r^2 = r^{14}$
- 5) $(p+3)^2 = p^2 + 6p + 9$
- 6) $(6ab)^2 = 36a^2 b^2$
- 7) $(n+n+n)^2 = (n^3)^2 = n^6$
- 8) $2^{18} : (2^6)^3 = 2^{18} : 2^{18} = 1$
- 9) $(2a^2 + 3a^2)^3 = (5a^4)^3 = 125a^{12}$
- 10) $n^2 + n^3 + n^3 = n^8$

36. Desarrollá y reducí a una expresión con la mínima cantidad de términos posible.

- a) $\left(a - \frac{3}{2}\right)^2$ b) $\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ c) $\left(\frac{a}{b} + \frac{3b}{a}\right)^2$
- d) $(3ab^2 - 2b)(3ab^2 - 2b)$ e) $\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$ f) $\left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(2a - \frac{b}{3}\right)$
- g) $\frac{5}{9} - \left(c - \frac{2}{3}\right)\left(c + \frac{2}{3}\right) + c(c-5)$ h) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}x$

37. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$. Indicá, en cada caso, el conjunto solución.

a) $(a-5)^2 + 2(a+3) = a(a-6)$

b) $(2x+3)^2 - 2(6x-5) = 20$

c) $\left(p - \frac{4}{7}\right)\left(p + \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$

d) $(2y+1)(2y-1) - (2y-3)^2 = y$

38. En cada caso, extraé el factor común indicado.

a) $2a^2 - \frac{1}{3}a$.

i. el factor a .

ii. el factor $2a$.

iii. el factor $-a$.

b) $-\frac{4}{9}b + \frac{16}{9}b^3a + \frac{4}{3}a^2b^2$.

i. el factor $\frac{4}{3}b$.

ii. el factor -1 .

39. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$. Hallá, en cada caso, el conjunto solución.

a) $2x^2 + 3x = 0$

b) $x^3 - 2x^2 = 0$

c) $x^3 + 4x = 0$

d) $5x^2 = \frac{4}{3}x$

e) $2(x^2 - 3) = 3(x - 2)$

f) $(x^3 - 4x)(x - 4)^2 = 0$

40. Resolvé los siguientes problemas.

a) La medida de un ángulo supera en 35° a la medida de su adyacente. Calculá las amplitudes de dichos ángulos.

b) La medida de la suma de tres ángulos consecutivos es 228° . Si dos de ellos son opuestos por el vértice, ¿cuánto mide cada ángulo?

c) Calculá la amplitud de dos ángulos, sabiendo que la suma de sus medidas es 72° y la diferencia entre las medidas de sus complementos es 22° .

d) El doble de la medida de un complemento de la mitad de la medida de ángulo $\hat{\alpha}$ es 126° . ¿Cuánto mide un suplemento de $\hat{\alpha}$?

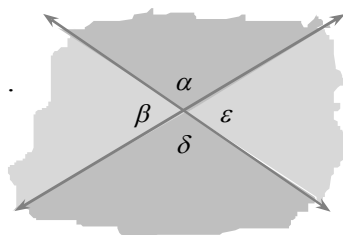
41. Calculá las amplitudes de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ si $|\hat{\alpha}| = 7x - 14^\circ$ y $|\hat{\beta}| = 5x + 10^\circ$, en cada una de las siguientes situaciones:

a) $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son opuestos por el vértice.

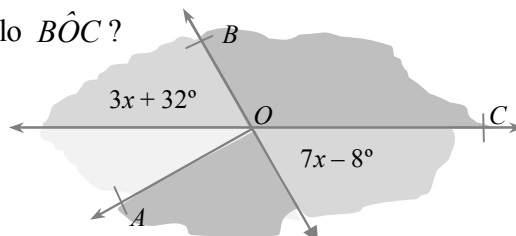
b) $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios.

c) $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios.

42. $|\hat{\alpha}| = \frac{3}{2}|\hat{\beta}| + 25^\circ$. Calculá las medidas de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$.

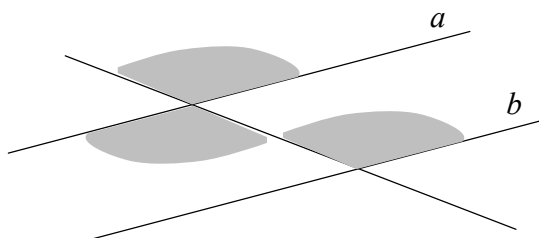


43. El ángulo $\hat{A}OB$ es recto. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{BOC}$?

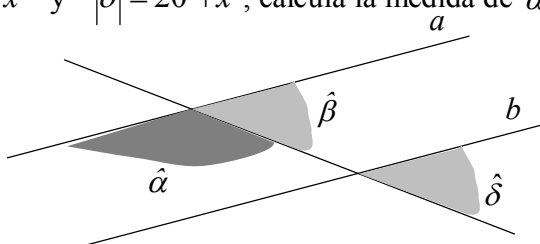


44. En cada caso, las rectas a y b son paralelas.

- a) Si $|\hat{\beta}| = 2|\hat{\alpha}| - 120^\circ$, calculá la medida de δ .

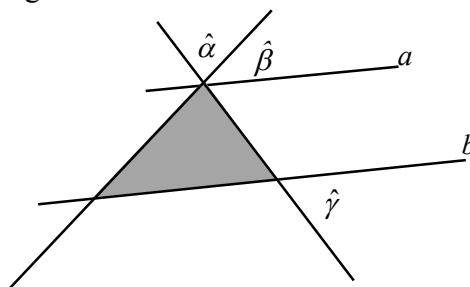


- b) Si $|\hat{\alpha}| = 2|\hat{\beta}| + x$ y $|\hat{\delta}| = 20^\circ + x$, calculá la medida de α .



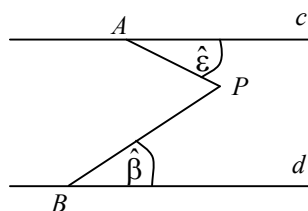
45. Hallá la amplitud de los ángulos interiores del triángulo sombreado

$$\text{sabiendo que } a \parallel b \text{ y } \begin{cases} |\hat{\alpha}| = \frac{2}{3}x + 38^\circ \\ |\hat{\beta}| = 62^\circ - \frac{1}{2}x \\ |\hat{\gamma}| = 4x - 70^\circ \end{cases}$$

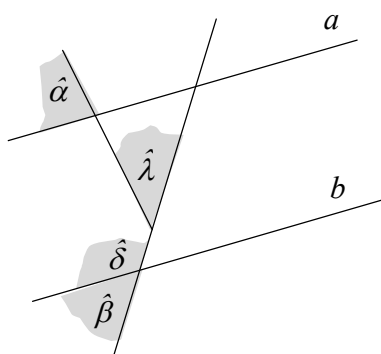


46. En el gráfico, $c \parallel d$, $|\hat{\varepsilon}| = 22^\circ$ y $|\hat{\beta}| = 37^\circ$.

Calculá $|\hat{APB}|$.



47.

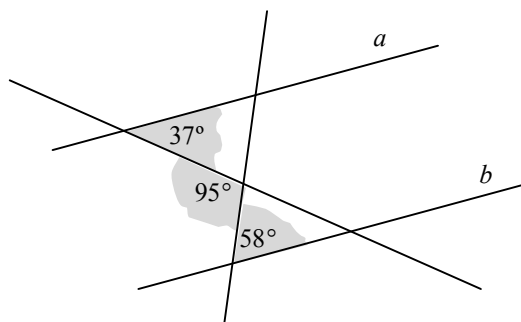


Se sabe que las rectas a y b son paralelas y además que $|\hat{\alpha}| = 30^\circ + x$,

$$|\hat{\beta}| = 2x - 15^\circ \text{ y } |\hat{\lambda}| = 39^\circ.$$

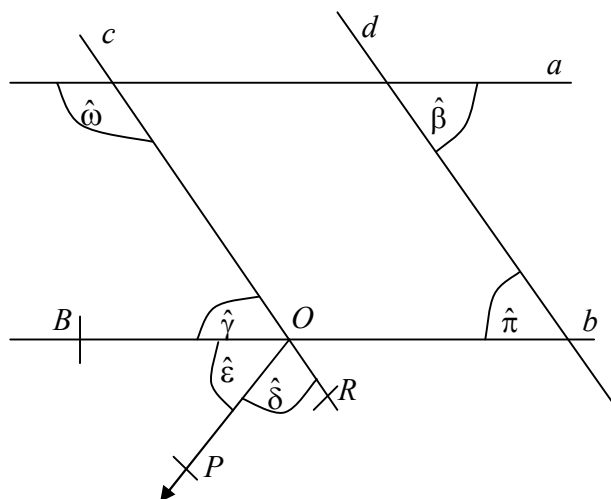
Calculá $|\hat{\delta}|$.

48. Teniendo en cuenta los datos del dibujo, demostrá que $a \parallel b$.



49. $a \parallel b$ y $c \parallel d$; $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $B\hat{O}R$, $|\hat{\epsilon}| = x + 36^\circ$ y $|\hat{\delta}| = 3x - 40^\circ$.

Calculá la amplitud de cada ángulo marcado, justificando cada repuesta.

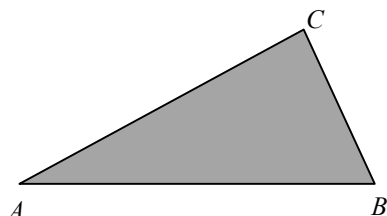


50. Demostrá que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

Ayuda: Realizá una figura de análisis y trazá por un vértice la recta paralela al lado opuesto.

51. El triángulo escaleno ABC es obtusángulo en A . Uno de los ángulos exteriores mide 72° y el ángulo $\hat{C}$ mide 8° más que el triple de $\hat{B}$. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo ABC ?

52.



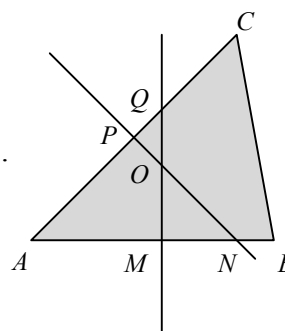
El triángulo ABC es rectángulo en C y la medida de $\hat{B}$ supera a la medida de $\hat{A}$ en 10° .

La bisectriz de $\hat{B}$ corta a $\overline{AC}$ en el punto R y a la bisectriz de $\hat{A}$ en el punto P .

Calculá la medida de los ángulos interiores del triángulo APR .

53. En el triángulo ABC , $|\hat{A}| = 45^\circ$ y $|\hat{B}| = 80^\circ$.

PN es la mediatriz de $\overline{AC}$ y MQ es la mediatriz de $\overline{AB}$.
Calculá la medida de los ángulos interiores del pentágono $NBCQO$.



Integración

54. Hallá todos los valores de k para los cuales $x = \frac{3}{2}$ sea solución de la ecuación

$$\frac{17 - \sqrt{-4x^2 + 13}}{8x} + k^0 = k^{-2}.$$

55. Resolvé los siguientes problemas:

- Marta colecciona monedas. $\frac{1}{3}$ de la colección son de oro, $\frac{1}{5}$ son de plata; $\frac{1}{2}$ del resto son de cobre y las 140 restantes son de níquel. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene Marta?
- Una fracción es equivalente a $\frac{3}{2}$. Si su numerador se aumenta en 1, la nueva fracción es equivalente a $\frac{5}{3}$. ¿Cuál es la fracción original?
- Mónica, Fernando y Pablo son hermanos. La suma de sus edades es 22 años. Pablo tiene el doble de la edad de Mónica y Fernando le lleva 2 años a su hermana. ¿Cuántos años tiene cada uno?
- Daniel, Gustavo, Sandra y Lucía se fueron de vacaciones. Como tenían que ir muy lejos se turnaron para manejar. Los primeros $\frac{3}{10}$ del recorrido manejó Daniel, después Gustavo condujo $\frac{2}{5}$ del recorrido; del resto, Sandra manejó $\frac{1}{3}$ y los últimos 160 km manejó Lucía. ¿Cuántos kilómetros recorrieron en total? ¿Cuántos kilómetros manejó cada uno? ¿Quién manejaba cuando pasaron por una ciudad que estaba a mitad de camino?

56. ¿Es cierto que si reemplazamos a r por cualquier número racional en la

expresión $\left(-\frac{1}{2}r + 3\right)^2$ da lo mismo que si la reemplazamos en la expresión

$\left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}r - \frac{3}{2}\right)$? Si tu respuesta es afirmativa, justificá tu afirmación.

Si tu respuesta es negativa, indicá para qué valor o valores de r da lo mismo.

57. Si se cumple que $2(a-9)+5a=\frac{a}{2}+8$ y $3(a-b)=a+b$, ¿cuáles son los valores de

$a^2 - b^2$ y de $(a-b)^2$?

58. Planteá y resolvé:

a) Encontrá un número racional sabiendo que la raíz cúbica del cuadrado de dicho número es igual a 0,25 aumentado en 2. ¿Cuántos hay?

b) El cubo de la diferencia entre las dos terceras partes de un número racional y 3 es igual al opuesto de $1/27$. ¿De qué número se trata?

59. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{Q}$. Hallá, en cada caso, el conjunto solución.

a) $(2x-3)^2 - 8x^2 : 2 - \frac{1}{2}x = -3^{-1}$

b) $(3x-1)(3x+1) = 3\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right)$

c) $2\sqrt{x - \frac{3}{4}} - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^{-2} = -3$

d) $\frac{(3x-2)^2}{4} = 16$

e) $(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) - (x-2)^2 = -\left(-\frac{3}{4}\right)$

f) $2x^2 + 3x + 5 = 5(x+1)$

g) $\frac{\sqrt{x-5}}{3} = \left(2 + \frac{1}{4}\right)^{-1} - \frac{1}{3}$

h) $\frac{(x-2)^2}{5} = -5$

i) $\frac{x+3}{2} - \frac{2x-1}{3} = 2(x-4) + 5$

j) $6|2x-7| - 4 = 5$

k) $|2x-7| + 8 = 0$

l) $|x-1| = |5-8|$

60. Encontrá el valor de a para que $3a+1$ sea solución de la ecuación

$$(2x-3)(x+2) - \frac{1}{2}(4x+6) = 2x^2 - 5.$$

61. Encontrá el conjunto solución de las siguientes inecuaciones en $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}$.

a) $2x+3 > 10$

b) $-3x+2 > 8$

c) $-2x+3 \leq 5x-4$

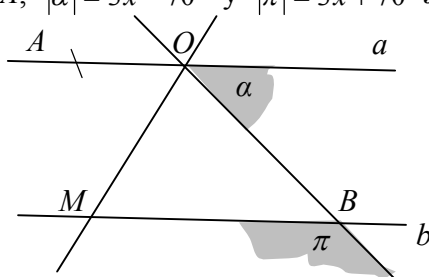
d) $\frac{-5x+2}{3} \geq -2x-4$

e) $\frac{2}{5}(3-x) < \frac{1}{3}(-x+9)$

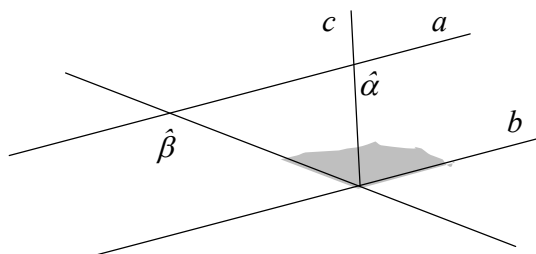
f) $\frac{3x-5}{-5} \leq -x+3$

62. Demostrá que si en un triángulo ABC la bisectriz del ángulo B está incluida en la mediatriz del lado $\overline{AC}$ entonces el triángulo es isósceles.

63. Calculá la amplitud de los ángulos interiores del triángulo OBM sabiendo que $a \parallel b$, $\overline{OM}$ bisectriz del $\angle BOA$, $|\hat{\alpha}| = 3x - 70^\circ$ y $|\hat{\pi}| = 3x + 70^\circ$. Justificá tu respuesta.

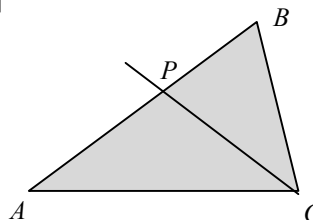


64. Se sabe que $a \parallel b$, $|\hat{\alpha}| = 130^\circ$ y $\vec{c}$ es la bisectriz del ángulo sombreado. Calculá la $|\hat{\beta}|$.

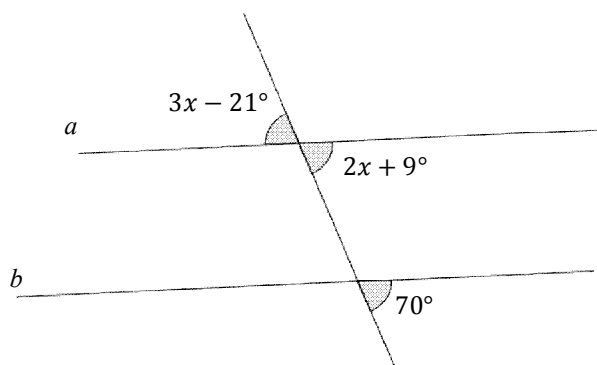


65. Encontrá la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC si se sabe que:

$$|\overline{AP}| = |\overline{PC}|, |\angle ABC| = x + 6^\circ, |\angle PCB| = 40^\circ \text{ y } |\angle APC| = 130^\circ - x.$$

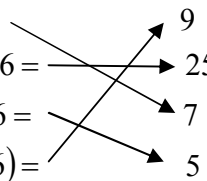


66. Decidí si las rectas a y b son paralelas a partir de los datos de la figura.



Respuestas**1.**

	2	-8	0,25	0	$-\frac{2}{3}$	-1,32	$(-5)^2$	-5^2	$\sqrt{16}$	$\sqrt[3]{-8}$
N	X						X		X	
Z	X	X		X			X	X	X	X
Q	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

2. a) $12 - 4 - 5 + 2 - 7 + 4 - 1 + 6 =$  5
 $12 - (4 - 5) + 2 - (-7 + 4 - 1) + 6 =$ 25
 $12 - 4 - [5 + 2 - (-7 + 4) - 1] + 6 =$ 7
 $12 - (4 - 5 + 2) - (-7 + 4 - 1 + 6) =$ 9

b) $6 \cdot 5 - 2 : 2 + 1 =$ 28
 $6 \cdot (5 - 2) : (2 + 1) =$ 30
 $6 \cdot 5 - (2 : 2 + 1) =$ 25
 $6 \cdot (5 - 2 : 2) + 1 =$ 6

3. a) 3 b) 10 c) 48 d) 0

4. a) -15 b) 9 c) -26

5. a) -2 b) -2 c) 19 d) 1

6. a)

Fracción irreducible	Otra fracción equivalente	Expresión decimal
$\frac{8}{5}$	$\frac{24}{15}$	1,6
$-\frac{16}{5}$	$-\frac{32}{10}$	-3,2
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{9}$	$0,\bar{6}$
$-\frac{11}{5}$	$-\frac{22}{10}$	-2,2

b) i. $-3/2$; $-0,27$; -2 ; $-1/2$ ii. $2/3$; $8/9$ iii. $5/3$ iv. $-3/2$; -2

7. F; V; F; V; F; V; F; V; V; F

8. a) $4/5$ b) 1 c) $10/3$ d) $2/21$ e) $20/21$

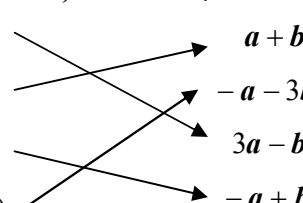
9. a) $9/4$ b) $39/2$ c) $28/3$ d) 3

10. a) $5/6$ b) $-8/9$ c) $13/15$

11. $-5/9$

12. a) 12 b) -7 c) $7/20$

13. a) $>$ b) $<$ d) $>$ e) = f) =

14. $2 \cdot (a - b) - (-b - a)$  $a + b$
 $-2 \cdot (-a - b) + (-b - a)$ $-a - 3b$
 $-(-a + b) - 2(-b + a)$ $3a - b$
 $(a - b) + 2(-b - a)$ $-a + b$

15. a), d) y g) b) y c) f) y h)

16. a) $-3/2$ b) $25/2$ c) $19/4$ d) $-45/4$

17. Sí, es solución de la ecuación.

18. a) V b) F c) V d) V

19. a) $S_N = \phi$; $S_Z = \{-3\}$ b) $S_N = \phi$; $S_Z = \{-1\}$

c) $S_N = S_Z = \phi$ d) $S_N = S_Z = \{5\}$

20. a) V b) F

21. a) $S = \{0; 6\}$ b) $S = \phi$ c) $S = \phi$ d) $S = \{-11; 9\}$

22. a) $S = \{\dots -4, -3, -2\}$ b) $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ c) $S = \{\dots -1, 0, 1\}$

23'. a) a^4 b) b c) c^{16} d) d^3

24'. a) $45a^8$ b) $8a^3b^{11}$ c) $3b^6c^5$

25. $(2a)^4 + 2(a^4 + a)$ $16a^5$ $18a^4 + 2a$
 $2a^4 + 2a(a^3 + 1)$ $2a^4 + 2a^4 + 2a$ $18a^9$
 $2a^4(8 + a)$ $16a^4 + 2a^5$ $4a^4 + 2a$
 $16a^4 + a$ $16a^4 + 2a^4 + 2a$ $2(8a^4 + a^5)$

26. a) $\left(\frac{a}{3}\right)^2$; $\frac{a^2}{9}$ b) 8cm

27. a) i. $\frac{1}{6}$ ii. 1 iii. 0 iv. $\frac{7}{4}$ v. -5 vi. $\frac{1}{100}$

b) i. $\frac{1}{b^4}$ ii. $\frac{x^2y^3}{81}$ iii. x^4 iv. a^{12}

28. a) $S = \left\{\frac{11}{6}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{42}{5}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{30}{7}\right\}$ d) $S = \phi$

e) $S = Q$ f) $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$ g) $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$ h) $S = \left\{-1; -\frac{2}{5}; 3\right\}$

29. $k = -\frac{1}{10}$

30. a) $x = -3$; $x = 3$ b) $x = -\frac{2}{5}$; $x = \frac{2}{5}$ c) No existe ningún valor de x .

d) $x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{3}{2}$ e) $x = -\frac{1}{2}$ f) $x = -\frac{4}{15}$; $x = \frac{14}{15}$

g) $x = 36$ h) $x = 104$ i) $x = -\frac{3}{2}$; $x = 5$

31. a) $73/4$ b) $17/16$

32. a) $S = \{-9; 9\}$ b) $S = \{-8; 2\}$ c) $S = \left\{-\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right\}$ d) $S = \{-5; 6\}$ e) $S = \phi$

33. a) La cumple un solo número entero: $n = -2$

b) No lo cumple ningún número entero.

c) La cumplen dos números enteros: $n = -4$; $n = 2$

d) La cumple un solo número entero: $n = 0$

34. a) $a^2 + 10a + 25$ b) $9b^2 - 24b + 16$ c) $4b^2c^2 + 20abc + 25a^2$

d) $12xy + 18y^2$ e) $4x^2 + 5xy^2$

35.

Ejercicio	Prueba A	Prueba B
1	0	1
2	1	0
3	1	0
4	0	1
5	1	1
6	0	1
7	1	0
8	0	1
9	1	0
10	1	0
Nota	6	5

36. a) $a^2 - 3a + \frac{9}{4}$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{9}{16}$ c) $\frac{a^2}{b^2} + 6 + \frac{9b^2}{a^2}$ d) $9a^2b^4 - 12ab^3 + 4b^2$

e) $x^2 - \frac{25}{4}$ f) $4a^2 - \frac{b^2}{9}$ g) $1 - 5c$ h) $\frac{9}{2}$

37. a) $S = \left\{ \frac{31}{2} \right\}$ b) $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ c) $S = \left\{ -\frac{5}{7}; \frac{5}{7} \right\}$ d) $S = \left\{ \frac{10}{3} \right\}$

38. a) i. $a \left(2a - \frac{1}{3} \right)$ ii. $2a \left(a - \frac{1}{6} \right)$ iii. $-a \left(-2a + \frac{1}{3} \right)$

b) i. $\frac{4}{3}b \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}b^2a + a^2b \right)$ ii. $-1 \cdot \left(\frac{4}{9}b - \frac{16}{9}b^3a - \frac{4}{3}a^2b^2 \right)$

39. a) $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 0 \right\}$ b) $S = \{0; 2\}$ c) $S = \{0\}$

d) $S = \left\{ 0; \frac{4}{15} \right\}$ e) $S = \left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$ f) $S = \{-2; 0; 2; 4\}$

40. a) $107^\circ 30'$ y $72^\circ 30'$ b) 48° , 132° y 48° .

c) 25° y 47° . d) 126°

41. a) $|\hat{\alpha}| = |\hat{\beta}| = 70^\circ$ b) $|\hat{\alpha}| = 40^\circ 50'$ y $|\hat{\beta}| = 49^\circ 10'$ c) $|\hat{\alpha}| = 93^\circ 20'$ y $|\hat{\beta}| = 86^\circ 40'$

42. $|\hat{\beta}| = |\hat{\varepsilon}| = 62^\circ$; $|\hat{\alpha}| = |\hat{\delta}| = 118^\circ$.

43. 118° .

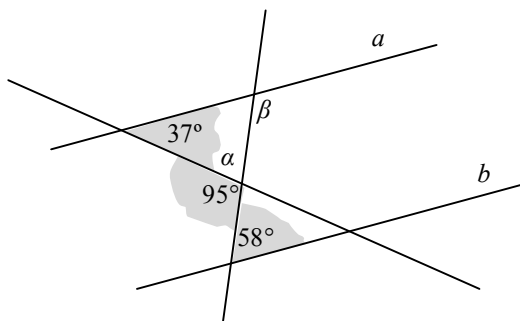
44. a) $|\hat{\delta}| = 120^\circ$ b) $|\hat{\alpha}| = 130^\circ$.

45. $|\hat{\alpha}| = 62^\circ$; $|\hat{\beta}| = 44^\circ$; $|\hat{\gamma}| = 74^\circ$.

46. $|\hat{APB}| = 59^\circ$.

47. $|\hat{\delta}| = 69^\circ$.

48.



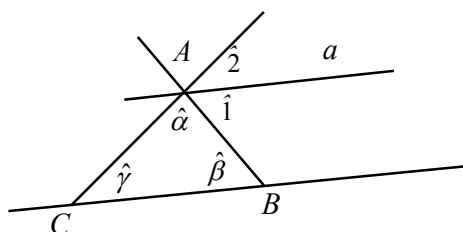
Llamemos γ al ángulo del dibujo que mide 58° .

$$\left. \begin{array}{l} |\hat{\alpha}| + 95^\circ = 180^\circ \Rightarrow |\hat{\alpha}| = 85^\circ \\ |\hat{\beta}| = |\hat{\alpha}| + 37^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow |\hat{\beta}| = 122^\circ$$

Además, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ son conjugados internos y $|\hat{\beta}| + |\hat{\gamma}| = 180^\circ$, entonces $a \parallel b$.

49. $|\hat{\beta}| = |\hat{\pi}| = |\hat{\gamma}| = 32^\circ$; $|\hat{\omega}| = 148^\circ$; $|\hat{\varepsilon}| = |\hat{\delta}| = 74^\circ$.

50.



Consideremos el triángulo ABC , cuyos ángulos interiores son α , β y γ .
Trazamos la recta a paralela a la recta CB .

$$\left. \begin{array}{l} |\hat{\gamma}| = |\hat{2}| \text{ por ser } \hat{\gamma} \text{ y } \hat{2} \text{ correspondientes entre paralelas} \\ |\hat{\beta}| = |\hat{1}| \text{ por ser } \hat{\beta} \text{ y } \hat{1} \text{ alternos internos entre paralelas} \\ \text{Además, } |\hat{\alpha}| + |\hat{1}| + |\hat{2}| = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow |\hat{\alpha}| + |\hat{\beta}| + |\hat{\gamma}| = 180^\circ, \text{ como}$$

queríamos probar.

51. $|\hat{A}| = 108^\circ$; $|\hat{B}| = 16^\circ$; $|\hat{C}| = 56^\circ$.

52. $|\hat{RAP}| = 20^\circ$; $|\hat{PRA}| = 115^\circ$; $|\hat{APR}| = 45^\circ$.

53. $|\hat{NBC}| = 80^\circ$; $|\hat{BCQ}| = 55^\circ$; $|\hat{CQO}| = |\hat{QON}| = |\hat{ONB}| = 135^\circ$.

Integración

54. $k = -\frac{2}{3}$ o $k = \frac{2}{3}$.

55. a) 200 monedas de oro, 120 monedas de plata, 140 monedas de cobre y 140 monedas de níquel.

b) $\frac{9}{6}$

c) Mónica tiene 5 años, Fernando tiene 7 años y Pablo tiene 10.

d) En total recorrieron 800 km.

Daniel manejó 240 km, Gustavo manejó 320 km, Sandra 80 km y Lucía 160 km.

Manejaba Gustavo cuando pasaron por una ciudad que estaba a mitad del camino.

56. No, el valor de r para el cual las expresiones son equivalentes es $r = \frac{15}{4}$.

57. 12 y 4.

58. a) $\sqrt[3]{x^2} = 0,25 + 2$ Hay dos números $-\frac{27}{8}$ y $\frac{27}{8}$.

b) $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^3 = -\frac{1}{27}$ El número es el 4.

59. a) $S = \left\{\frac{56}{75}\right\}$ b) $S = Q$ c) $S = \{1\}$ d) $S = \left\{-2, \frac{10}{3}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $S = \{0,1\}$ g) $S = \left\{\frac{46}{9}\right\}$ h) $S = \emptyset$

i) $S = \left\{\frac{29}{13}\right\}$ j) $S = \left\{\frac{11}{4}, \frac{17}{4}\right\}$ k) $S = \emptyset$ l) $S = \{-2,4\}$

60. $a = -\frac{5}{3}$

61. a) $S_N = S_Z = \{4,5,6,\dots\}$; $S_Q = \left\{x \in Q / x > \frac{7}{2}\right\}$

b) $S_N = \emptyset$; $S_Z = \{\dots -4, -3\}$; $S_Q = \{x \in Q / x < -2\}$

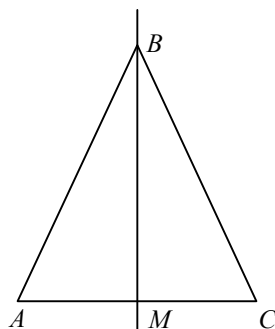
c) $S_N = S_Z = \{2,3,4,\dots\}$; $S_Q = \{x \in Q / x > 1\}$

d) $S_N = \{1,2,3,\dots\}$; $S_Z = \{-14, -13, -12, \dots\}$; $S_Q = \{x \in Q / x \geq -14\}$

e) $S_N = \{1,2,3,\dots\}$; $S_Z = \{-26, -25, -24, \dots\}$; $S_Q = \{x \in Q / x > -27\}$

f) $S_N = \{1,2,3,4,5\}$; $S_Z = \{\dots, 2, 3, 4, 5\}$; $S_Q = \{x \in Q / x \leq 5\}$

62.



$$\left. \begin{array}{l}
 MB \text{ es la mediatriz de } \overline{AC} \Rightarrow |\hat{A}MB| = 90^\circ \\
 \text{La bisectriz de } \hat{B} \text{ está incluida en } MB \Rightarrow |\hat{M}BA| = \frac{1}{2}|\hat{B}| \\
 \text{Observando el triángulo } AMB, \text{ vemos que } |\hat{A}| + |\hat{A}MB| + |\hat{M}BA| = 180^\circ
 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$|\hat{A}| + 90^\circ + \frac{1}{2}|\hat{B}| = 180^\circ \Rightarrow |\hat{A}| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\hat{B}|$$

Podemos hacer un razonamiento análogo para averiguar cuánto mide el ángulo C :

$$\left. \begin{array}{l}
 MB \text{ es la mediatriz de } \overline{AC} \Rightarrow |\hat{C}MB| = 90^\circ \\
 \text{La bisectriz de } \hat{B} \text{ está incluida en } MB \Rightarrow |\hat{M}CA| = \frac{1}{2}|\hat{B}| \\
 \text{Observando el triángulo } CMB, \text{ vemos que } |\hat{C}| + |\hat{C}MB| + |\hat{M}BC| = 180^\circ
 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$|\hat{C}| + 90^\circ + \frac{1}{2}|\hat{B}| = 180^\circ \Rightarrow |\hat{C}| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\hat{B}|$$

Por lo tanto, tenemos que los ángulos A y C miden lo mismo, entonces el triángulo ABC es isósceles.

63. $|\hat{M}OB| = 80^\circ$, $|\hat{O}MB| = 80^\circ$ y $|\hat{O}BM| = 20^\circ$.

64. $|\hat{\beta}| = 100^\circ$

65. $|\hat{B}AC| = 46^\circ$; $|\hat{A}CB| = 86^\circ$ y $|\hat{A}BC| = 48^\circ$.

66. Las rectas a y b no son paralelas, pues al igualar la medida de los ángulos opuestos por el vértice obtenemos que el ángulo $2x + 9^\circ = 69^\circ$ y como su ángulo correspondiente según los datos de la figura es 70° no son iguales por lo tanto las rectas no son paralelas.